104年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

代號：30830 全一頁

考 試 別：國家安全情報人員
等　　別：三等考試
類 科 組：數理組
科　　目：數論
考試時間：2 小時　　　　座號：______________

※注意：㈠禁止使用電子計算器。
　　　㈡不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、㈠設F_3為一個 3 個元素的有限體。若α為佈於F_3的多項式$1+2x+x^3$的一個根，試證明α為有限體$F_3[\alpha]$的一個原元素（primitive element）。（10 分）

㈡求下列同餘聯立方程式的解：（10 分）

$2x \equiv 1 \pmod 3$
$3x \equiv 2 \pmod 5$
$5x \equiv 4 \pmod 7$

二、一個合成數（composite number）n 滿足對所有整數a，$1 \le a \le n$，$a^n \equiv a \pmod n$都成立；稱為卡邁克爾數（Carmichael number）。（每小題 10 分，共 20 分）

㈠試證明 561 是一個卡邁克爾數。

㈡設 n 為一個卡邁克爾數，試證明每一個 n 的質因數 p 都滿足$p-1$整除$n-1$。

三、設 f 為一個算術函數且令$F(n)=\sum_{d|n} f(d)$。（每小題 10 分，共 20 分）

㈠試證明若 f 是可乘函數，則 F 亦為可乘函數。

㈡反之，試證明上面敘述㈠的逆敘述亦成立。

四、設 p 為一滿足$p \equiv 1 \pmod 4$之質數。若$q=2p+1$亦為一個質數，試證明 2 必為 mod q 的原根（primitive root）。（20 分）

五、㈠在方程式$x^2-2y^2=1$所有的正整數解(x, y)中，使得$x+y\sqrt{2}$最小的解稱為此方程式的基本解。已知方程式$x^2-2y^2=1$的基本解為(3, 2)。試證明此方程式所有的正整數解為(x_k, y_k)，其中$x_k+y_k\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^k$，$k=1, 2, 3, \ldots\ldots$。（10 分）

㈡試證明每一個整數都可以表示成五個整數的立方和。（10 分）