101 年特種考試地方政府公務人員考試試題

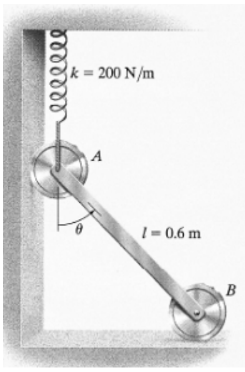
代號：34040

等　　別：三等考試
類　　科：機械工程
科　　目：工程力學（包括靜力學、動力學與材料力學）

一、如圖一所示，均勻連桿（AB）的質量 10 kg。在 θ = 0°時彈簧未受力，試求：

㈠平衡時的角度 θ 為何？（10 分）

㈡探討此平衡位置的穩定性為何？（10 分）



圖一

【擬答】

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}ks^2 - W\left(s + \frac{l}{2}\cos\theta - \frac{l}{2}\right)$$

因為 $l = s + l\cos\theta$ 或 $s = l(1-\cos\theta)$ ，則

$$V = \frac{1}{2}kl^2(1-\cos\theta)^2 - \frac{Wl}{2}(1-\cos\theta)$$

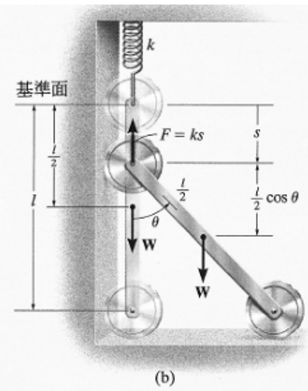
平衡位置　取 V 的一階導數，得

$$\frac{dv}{d\theta} = kl^2(1-\cos\theta)\sin\theta - \frac{Wl}{2}\sin\theta = 0$$

$$l\left[kl(1-\cos\theta) - \frac{W}{2}\right]\sin\theta = 0$$

$\sin\theta = 0$　　$\theta = 0°$

$$\theta=\cos^{-1}\left(1-\frac{W}{2kl}\right)=\cos^{-1}\left[1-\frac{10(9.81)}{2(200)(0.6)}\right]$$
$$=53.8^\circ$$



穩定性

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=kl^2(1-\cos\theta)\cos\theta+kl^2\sin\theta\sin\theta-\frac{Wl}{2}\cos\theta$$
$$=kl^2(\cos\theta-\cos2\theta)-\frac{Wl}{2}\cos\theta$$

代入 $\theta=0^\circ$ 及 $\theta=53.8^\circ$ ，得

$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0^\circ}=200(0.6)^2(\cos0^\circ-\cos0^\circ)-\frac{10(9.81)(0.6)}{2}\cos0^\circ$$
$$=-29.4<0$$ （不穩定平衡，在 $\theta=0^\circ$ ）

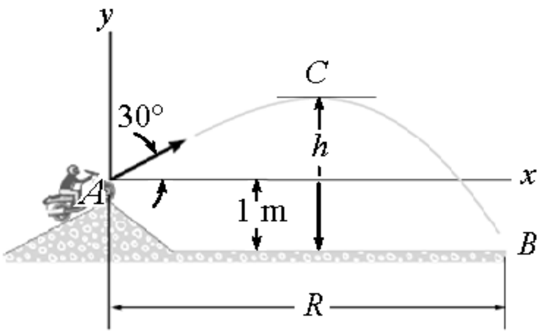
$$\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=53.8^\circ}=200(0.6)^2(\cos53.8^\circ-\cos107.6^\circ)-\frac{10(9.81)(0.6)}{2}\cos53.8^\circ$$
$$=46.9>0$$ （穩定平衡，在 $\theta=53.8^\circ$ ）

二、越野車賽車場的設計為騎士須由 1m 高、30°的斜坡之頂點 A 躍出。在一項比賽中，一騎士在空中停留 1.5 秒，如圖二所示，試求：

㈠該騎士在離開斜坡時的速度 VA 為何？（6 分）

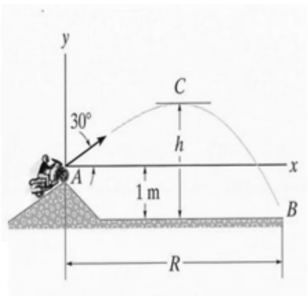
㈡落地前所經過的水平距離 R 為何？（6 分）

㈢落地前最大高度 h 為何？（8 分）



圖二

【擬答】



垂直方向的運動，因為賽車飛行的時間和路徑上兩端點間的垂直距離已知，可求得 υ_A 。即

$$(+\uparrow)\qquad (S_B)_y = (S_A)_y + (\upsilon_A)_y t_{AB} + \frac{1}{2}a_c t_{AB}^2$$

$$-1 = 0 + \upsilon_a \sin 30°(1.5) + \frac{1}{2}(-9.81)(1.5)^2$$

$$\upsilon_A = 13.38\text{m/s} = 13.4\text{m/s}$$

水平方向的運動，接著求解水平距離 R。

$$(+\rightarrow)\qquad (S_B)_x = (S_A)_x + (\upsilon_A)_x t_{AB}$$

$$R = 0 + 13.38\cos 30°(1.5)$$

$$= 17.4\text{m}$$

為了求得最大高度 h，需考慮路徑 AC，在最大高度處，$(\upsilon_A)_y = 0$ 且 υ_A 已知

$$(\upsilon_C)_y^2 = (\upsilon_A)_y^2 + 2a_c[(s_C)_y - (s_A)_y]$$

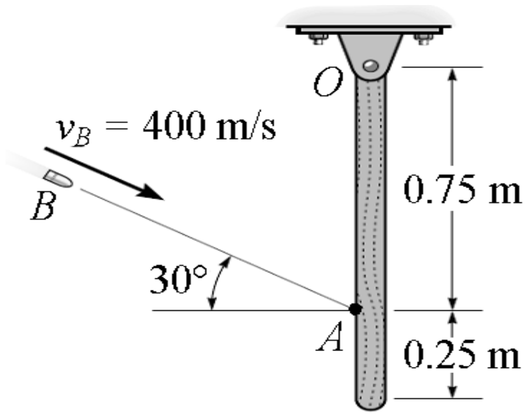
$$(0)^2 = (13.38\sin 30°)^2 + 2(-9.81)[(h-1)-0]$$

h=3.28m

賽車在 B 點處落地，其速度的分量為

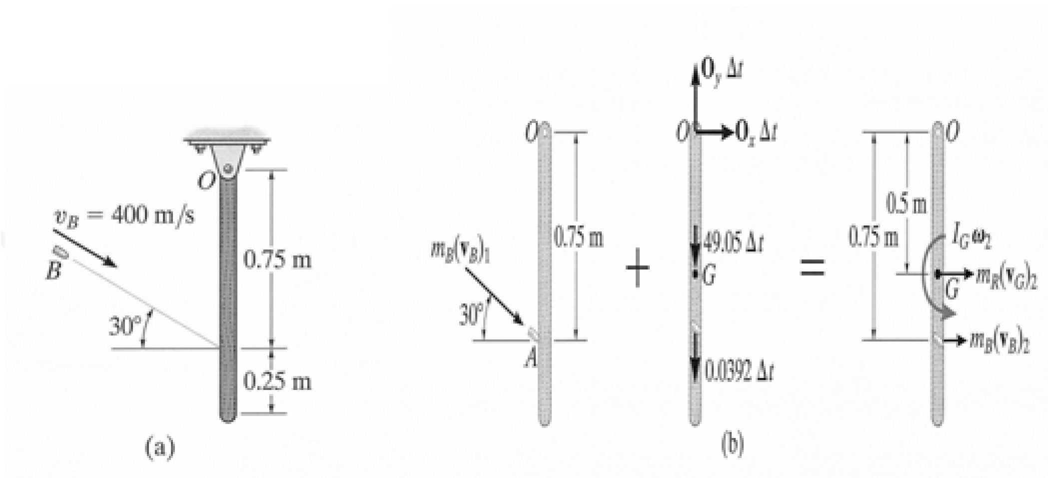
$$(\upsilon_B)_x = 11.6\text{m/s}\rightarrow,\qquad (\upsilon_B)_y = 8.02\text{m/s}\downarrow$$

三、如圖三所示，質量 5 kg 的細桿以插銷定位於 O，起始時為靜止狀態。若有一 4 g 的子彈以 400m/s 速度射入長桿 A 點內，試求當子彈嵌入桿子內的一瞬間，此桿子的角速度為何？（20 分）



圖三

【擬答】



說明：

衝量與動量圖：將桿件與子彈視為單一系統，分析時子彈作用在桿件上的衝量可消去，且可求出桿件在受碰撞後的角速度。為了使所採用的原理更清楚，圖(b)中分別繪出衝量與動量圖。動量圖繪出衝擊前與衝擊後的情況。衝擊期間，子彈與細桿在 A 點交換大小相等，方向相反的內衝量。如衝量圖所示，系統之外衝量是來自 O 點的反作用力及子彈與桿件的重量。因衝擊時間很短，桿件只稍微移動，故這些衝量對 O 點的“力矩”可視為零。也因此角動量對此點是守恆的。

角動量守恆

$$m_B(\upsilon_B)_1\cos30°(0.75m) = m_B(\upsilon_B)_2(0.75m) + m_R(\upsilon_G)_2(0.5m) + I_G\omega_2$$

(0.004kg)(400cos30°m/s)(0.75m)=

$$(0.004\text{kg})\,(\upsilon_B)_2(0.75\text{m}) + (5\text{kg})(0.5\text{m}) + [\frac{1}{12}(5\text{kg})(1\text{m})^2]\omega_2$$

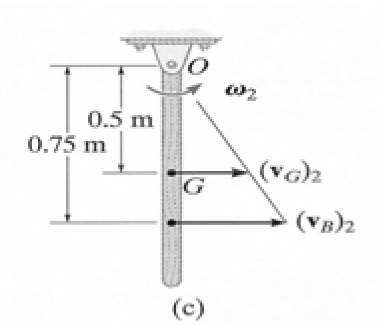
或　$1.039 = 0.003\,(\upsilon_B)_2 + 2.50(\upsilon_G)_2 + 0.417\omega_2$ (1)

運動學：因桿件銷接在 0 點

$(\upsilon_G)_2 = (0.5\text{m})\omega_2 \qquad (\upsilon_B)_2 = (0.75\text{m})\omega_2$

代入(1)式，解得

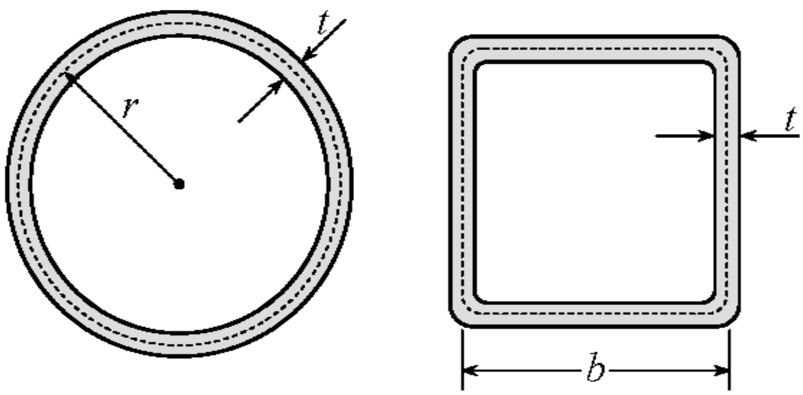
$\omega_2 = 0.623\,\text{rad/s}$



四、如圖四所示，一圓管和一方形管的材料、兩桿長度、壁厚和橫截面積皆相同，並承受相同的扭矩（若不計方形管角落的應力集中效應），試求：

㈠圓管與方形管所受剪應力之比為何？（10 分）

㈡圓管與方形管所受扭角比為何？（10 分）



圖四

【擬答】

1.圓管：

(1)橫剖面的中位線所圍之面積：$A_{m1} = \pi r^2$

(2)橫剖面面積：$A_1 = \pi dt = 2\pi rt$

(3)扭轉常數：$J_1 = 2\pi r^3 t$

2.正方形管：

(1)橫剖面的中位線所圍之面積：$A_{m2} = b^2$

(2)橫剖面面積：$A_2 = 4bt$

(3)扭轉常數：$J_2 = b^3 t$

3.因為圓管與正方形管之橫剖面積相同：

$A_1 = 2\pi rt = A_2 = 4bt$

可得 $b = \frac{\pi r}{2}$

則 $A_{m2} = b^2 = (\frac{\pi r}{2})^2$ $J_2 = b^3 t = (\frac{\pi r}{2})^3 t$

4.圓管與正方形管之剪應力比：

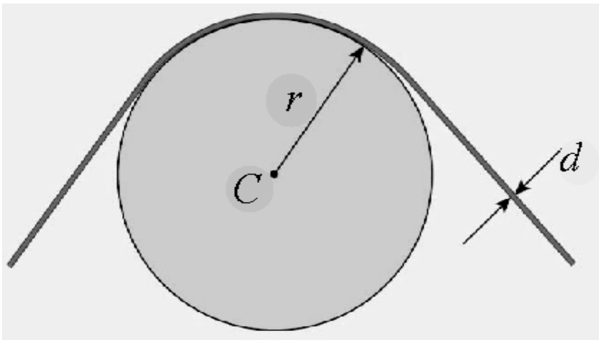
$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\frac{T}{2A_{m1}t}}{\frac{T}{2A_{m2}t}} = \frac{A_{m2}}{A_{m1}} = \frac{\pi}{4}$$

5.扭轉角比：$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{\frac{TL}{GJ_1}}{\frac{TL}{GJ_2}} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\pi^2}{16}$

五、如圖五所示，一直徑 d 的高強度鋼索沿一半徑為 r 的圓筒彎繞。假設 d = 4mm 及 r = 0.5m，試求：

㈠鋼索的最大彎矩 M 為何？（10 分）

㈡最大彎曲應力 σ_{max} 為何？（10 分）（鋼索的彈性模數 E = 200 GPa）



圖五

【擬答】

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho} = E\frac{\frac{d}{2}}{\frac{d}{2}+r} = 200\times10^9\frac{\frac{4}{2}}{\frac{4}{2}+500} = 796.81(MPa)$$

$$\sigma = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32M}{\pi(4)^3} = 769.81(Mpa) \Rightarrow M = 5006.5(N-mm)$$