100 年特種考試地方政府公務人員考試試題　　代號：41360 41560 44060　全一頁

等　　別：四等考試
類　　科：統計、經建行政、交通技術
科　　目：統計學概要
考試時間：1 小時 30 分　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：㈠可以使用電子計算器。
㈡不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、公司某一部門共 10 個人參加了輪盤遊戲，中獎機率為 0.1。
㈠如果每人玩 1 次遊戲，那這個部門沒人中獎的機率為何？（7 分）
㈡如果每人玩 3 次遊戲，那這個部門至少中獎 1 次的機率為何？（7 分）
㈢假定中獎的獎金為 10 萬元，又只讓該部門的兩個人各玩遊戲 5 次。那該部門可獲獎金的期望值為何？（6 分）

二、在某一工作環境中，若溫度控制在 22°～26° 中，則產品品質合格（良品），否則為不良品。若溫度為一隨機變數 X，其平均為 24°，變異數為 0.25°。
㈠請問生產一個產品其為良品的機率至少為多少？（12 分）
㈡如果生產 1,600 個產品，期望至少多少個產品為良品？（8 分）

三、假設 $X_1,\cdots,X_n$ 為一隨機樣本，其母體分配為 $N(\mu,1)$。
㈠請推導出 μ 的 90%信賴區間。（8 分）
㈡如果希望上述區間長度為 0.5，請問樣本數 n 至少為多少？（12 分）
（註：若 $\alpha = P(Z \geq z_\alpha)$，則 $z_{0.01} = 2.33$，$z_{0.05} = 1.645$，$z_{0.1} = 1.28$，$z_{0.5} = 0$）

四、某一種植物的成長與陽光強度有某種關係。令 Y 表示植物成長速度及 X 表示光的強度，具有下面聯合機率密度函數：

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} 4x^2y + 2y^5, & 0 \leq x \leq 1 \text{且} 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它點} \end{cases}$$

我們有興趣的是當陽光強度 X = 0.5 時，植物成長速度的平均值，即 $E(Y \mid X = 0.5)$，請導出 $E(Y \mid X = x)$ 之公式，（15 分）並計算 $E(Y \mid X = 0.5)$。（5 分）

五、假設我們有一簡單迴歸模型如下：

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i,\ i = 1,\cdots,n$$
$$\varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0,\sigma^2)$$

設 $\hat{\beta}_0$ 及 $\hat{\beta}_1$ 為最小平方估計量及 $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ 具有常態分配

$N(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}))$，我們也知

$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i))^2}{n-2}$ 滿足 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$。

另外 S^2 與 $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ 獨立。請導出 $\beta_0 + \beta_1 x$ 之 $100(1-\alpha)$%信賴區間。（20 分）