98年公務人員特種考試警察人員考試、98年特種考試交通事業鐵路人員考試及98年公務人員特種考試民航人員考試試題

代號：20250　全一張（正面）

等　　別：二等考試

類　　科：刑事警察人員犯罪分析組

科　　目：數位訊號處理（DSP）

考試時間：2 小時　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：㈠可以使用電子計算器。
㈡不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、給一如下離散餘弦轉換公式（Discrete Cosine Transform：DCT）

$$D(i,j)=\frac{1}{\sqrt{2N}}C(i)C(j)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\frac{(2x+1)i\pi}{2N}\cos\frac{(2y+1)j\pi}{2N},$$

在上式中，當 $i=0$ 時，$C(i)=1/\sqrt{2}$，否則 $C(i)=1$；當 $j=0$ 時，$C(j)=1/\sqrt{2}$，否則 $C(j)=1$；$f(x,y)$ 代表位於 (x,y) 位置的影像像素灰階值。請將上式作用於下列 8×8 影像，算出 DCT 係數矩陣的直流（Direct Current：DC）值。（25 分）

10	23	12	5	7	9	22	30
22	32	16	5	8	12	11	23
29	32	16	11	70	30	20	20
100	142	3	45	44	200	50	22
103	120	33	41	200	60	22	70
120	210	22	123	23	70	69	160
12	222	24	126	90	20	6	60
212	252	243	26	149	221	61	90

二、給 N 個基底向量

$$B_i=\left(\frac{1}{\sqrt{N}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}}\cos\frac{(2i+1)\pi}{2N},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}}\cos\frac{(2i+1)2\pi}{2N},\cdots,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}}\cos\frac{(2i+1)(N-1)\pi}{2N}\right),$$

$0\le i\le N-1$，試證明該 N 個基底向量具有單位正交性（Orthonormality），亦即證明 $<B_i^t,B_j^t>=1$ 當 $i=j$ 時；$<B_i^t,B_j^t>=0$ 當 $i\ne j$ 時，此處符號< ，>表示內積（Inner Product）運算。（25 分）

（請接背面）

等　別：二等考試
類　科：刑事警察人員犯罪分析組
科　目：數位訊號處理（DSP）

三、令$W_N^i = e^{\frac{2\pi i}{N}i}$為 1 的基本根（Primitive Root）且滿足$W_N^N = 1$。從複數平面上的單位圓來看，滿足$W_N^N = 1$的 N 個複數根分別為$W_N^0 = W_N^N = 1, W_N^1, W_N^2, \cdots, W_N^{N-1}$。$N = 8$時，傅利葉矩陣為

$$F_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^1 & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^1 & W^6 & W^3 \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 & 1 & W^6 & W^4 & W^2 \\ 1 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{pmatrix}$$

在F_8的矩陣中，為簡化起見，我們簡化W_8^i為W^i。因為$W_8^{10} = W_8^8 \times W_8^2 = W_8^2 = W^2$，所以$F_8[4,7] = W^2$。給一輸入序列$\bar{X}$，可利用$F_N \bar{X}$來完成傅利葉轉換，請詳細證明快速傅利葉轉換可在$O(N \log N)$的時間完成。（25 分）

四、令$F(u,v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi\left[\frac{(ux+vy)}{N}\right]}$，試證明$\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)(-1)^{x+y} e^{-j2\pi\left[\frac{(ux+vy)}{N}\right]}$

$= F(u - \frac{N}{2}, v - \frac{N}{2})$。（25 分）