

99年公務人員特種考試警察人員考試及
99年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

代號：20240

全一張
(正面)

等 別：二等考試

類 科：刑事警察人員犯罪分析組

科 目：計算機數學（包括離散數學、機率與統計）

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、在一個宴會場合有 n 個人，互相握手。有些人互相握了手，有些人沒有互相握手，任何兩人之間頂多只互相握手一次，不重複握手。(16分)

(一)用 a_n 代表握手次數為奇數的人數。試證明 a_n 必是偶數。

(二)證明其中必有兩個人，其握手次數是相同的。

二、 $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ (16分)

(一)由 S 到 S 的一對一函數 (one-to-one) 共有多少種？

(二)由 S 到 S 的映成函數 (onto) 共有多少種？

(三)由 S 到 S 的一對一，且映成函數，而且又滿足 $f(i) \neq i$ for all $i=1$ to n 共有多少種？

三、有一個 n 階的樓梯，我們每走壹步可以跨一階或兩階。

試問總共有多少種不同的走法？

例如 $n=3$ 可以有 1, 1, 1 或 1, 2 及 2, 1 共 3 種走法。

用 a_n 代表總共有多少種不同的走法，寫出 a_n 的遞迴關係並求其解。(16分)

四、有 n 個編號袋子，1 號袋、2 號袋、... n 號袋。

每一個袋子都裝了 a 個白球與 b 個黑球。從第 1 號袋子中隨機抽出一個球，將其放入第 2 號袋子。然後從第 2 號袋子中隨機抽出一個球，將其放入第 3 號袋子。如此依序做下去 3, 4, ..., n ，最後在第 n 號袋子中隨機抽出一個球。

問題：若第 1 次在第 1 號袋子抽出的是白球。試求出最後在第 n 號袋子抽出的也是白球的機率。(16分)

五、假設我們要替很大的一群人抽血檢驗是否帶有某種病菌。由於檢驗一個血液樣本很費時，我們可以把好幾個人的抽血樣本混合在一起做為一個檢驗單位，一次檢驗這一個單位。

假設這個合併的血液單位，一次檢驗，如果檢驗結果是沒有病菌 (negative result)，則這幾個人全部都沒有病菌。但若檢驗結果是有病菌 (positive result)，則這幾個人必須再重新抽血，一一個別檢驗一次。目標是希望總共檢驗次數少一點。

假設共有 N 個人，每 k 個人分為一組，共有 n 組，且 $N = kn$ 。

若對這 N 個人都個別一一檢驗，需要 N 次檢驗 (individual test)。

若每 k 個人一組合併血液作一次檢驗，可能最少只需 $n = N/k$ 次檢驗 (若所有 N 個人都沒有病菌)。但最多則需 $n + N$ 次檢驗 (若每一組都有人帶有病菌)。

假設每一個人帶有病菌的機率是 p ，且都互相獨立無關 (independent)。在每一組 k 個人是否帶有病菌也都獨立無關。(18分)

(一)試計算並推導出上述分組檢驗，總共檢驗次數的期望值。

(二)若 $N = 100$, $p = 20/100$, $k = 2$ 。試計算這樣的分組檢驗，其總共的檢驗次數期望值是多少？

(請接背面)

99年公務人員特種考試警察人員考試及
99年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

代號：20240

全一張
(背面)

等 別：二等考試

類 科：刑事警察人員犯罪分析組

科 目：計算機數學（包括離散數學、機率與統計）

六、從一個常態分布（normal distribution） $N(\mu, \sigma^2)$ 的母體，取出 n 個隨機樣本（random sample） $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 。（18分）

(一)試推導出mean μ 及variance σ^2 的maximum likelihood estimator。

(二)上述的estimator是否unbiased estimator？若是，證明之。若否，則寫出一個unbiased estimator並證明它的確是unbiased。