代號：30950
　　　31050
頁次：4－1

98 年公務人員特種考試身心障礙人員考試試題

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：可以使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、求解下列矩陣的特徵值與特徵向量 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$。（10 分）

二、若 D 為半圓球 $x^2+y^2+(z-1)^2=9, 1\le z\le 4,$ 與平面 $z=1$ 所包含的區域，S 為其表面，試求面積分 $\iint_S [x\vec{i}+y\vec{j}+(z-1)\vec{k}]\cdot\vec{n}\,dA$，$\vec{n}$ 為該面的向外單位法向量。（10 分）

三、試將函數 $f(z)=\dfrac{1}{z\,(z-1)}$ 在 $1<|z-1|$ 的範圍內，展開成 Laurent 級數（Laurent series）。（15 分）

四、有一波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 其邊界條件為 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$ 與 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=0$。若啟始條件（initial condition）為 $u(x,0)=1+\cos(\dfrac{\pi x}{L})+5\cos(\dfrac{3\pi x}{L})$ 與 $\left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0$ 試求解 $u(x,t)$。（15 分）

乙、測驗題部分：（50 分） **代號：5309**

㈠本試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 解微分方程式 $x^2 y' = y^2 + 2xy$，其中 $y(1) = 1$。

(A) $\dfrac{x}{y} + x = 2$
(B) $\dfrac{x}{y^2} + x = 2$
(C) $\dfrac{x^2}{y} + xy^2 = 2$
(D) $\dfrac{x^2}{y} + x = 2$

2 求 $y'' + 4y' - 2y = 0$ 之通解：

(A) $C_1 e^{(-2+\sqrt{6})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{6})x}$
(B) $C_1 e^{-2x}\cos(\sqrt{6}x) + C_2 e^{-2x}\sin(\sqrt{6}x)$
(C) $C_1 \cos(-2+\sqrt{6})x$
(D) $C_1 \sin(-2-\sqrt{6})x$

3 若 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$c \in \mathbf{R}$ 是 $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 的通解（general solution），試求矩陣 $\mathbf{A}$。

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

4 應用拉式轉換（Laplace transform）求積分方程式：$y(t) = 2t^2 + \int_0^t y(t-\tau)e^{-\tau}d\tau$ 的解爲何？

(A) $y(t) = 2t^2 + \dfrac{2}{3}t^3$
(B) $y(t) = 2t^2 + \dfrac{1}{3}t^3$
(C) $y(t) = 2t^2 + 3t^3$
(D) $y(t) = 2t^2 + \dfrac{1}{12}t^4$

5 以下何者爲 $\dfrac{1}{s(s^2 + w^2)}$ 之拉式反轉換（inverse Laplace transform）？

(A) $\dfrac{1}{w^2}(1 - \sin wt)$
(B) $\dfrac{1}{w^2}(t - \sin wt)$
(C) $\dfrac{1}{w^2}(1 - \cos wt)$
(D) $\dfrac{1}{w^2}(t - \cos wt)$

6 已知函數 $F(x) = x,\ 0 < x < 2$，以半幅展開 $F(x)$ 爲傅立葉餘弦級數 $F(x) = \dfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{n\pi x}{2}$，則下列何者正確？

(A) $a_0 = 2,\ a_n = \dfrac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1),\ \ n \neq 0$
(B) $a_0 = 4,\ a_n = \dfrac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1),\ \ n \neq 0$
(C) $a_0 = 2,\ a_n = \dfrac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1),\ \ n \neq 0$
(D) $a_0 = 4,\ a_n = \dfrac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1),\ \ n \neq 0$

7 定義傅立葉轉換為 $F\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$，求 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$ 之傅立葉轉換，其中 $\delta(t)$ 為 Dirac delta 函數。

(A) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}$ (B) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}$ (C) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{i\omega kT}$ (D) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-i\omega kT}$

8 若 $A\in R^{n\times n}$ 為對稱矩陣，則下列何者敘述正確？

(A)一定可對角化 (B)特徵值全部相異

(C)一定可逆 (D)對於任意 $x\in R^{n}$，則 $x^{T}Ax\geq 0$

9 將函數 $f(t)=(2\cos(2\pi t))^4$ 的複數傅立葉級數（complex Fourier series）表示成 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in2\pi t}$，其中 $i=\sqrt{-1}$。

求 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ 之值為何？

(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 16

10 給定一個微分方程式 $y''-xy'+e^{x}y=4$，初始值為 $y(0)=1$，$y'(0)=4$，這個初始值問題存在著一個冪級數

解（power series solution）$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$。則 x^3 的係數 c_3 之值為何？

(A) $-\frac{1}{6}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{4}$

11 求 $\int_{(0,3)}^{(2,4)}(2y+x^2)\,dx+(3x-y)\,dy$，沿拋物線 $x=2t$，$y=t^2+3$ 之值為何？

(A) $\frac{31}{2}$ (B) $\frac{33}{2}$ (C) $\frac{35}{2}$ (D) $\frac{37}{2}$

12 下列給定的矩陣 **A, B** 中，何者互為相似矩陣（similar matrices）？

(A) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$ (B) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$

(C) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ (D) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&3\\1&1\end{bmatrix}$

13 方程式 $|z+3|+|z-3|=10$ 在直角座標中之軌跡為何形狀？

(A)圓 (B)橢圓 (C)雙曲線 (D)拋物線

14 令 R 爲 x - y 平面上的一個封閉有界領域（closed bounded region），封閉曲線 C 爲 R 之邊界（boundary），且 R 永遠位於行經 C 之路徑之左邊，則下列路徑積分中，何者不爲 R 之面積？

(A) $\frac{1}{2}\oint_C (xdy + ydx)$　(B) $\frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx)$　(C) $\oint_C (2xdy + ydx)$　(D) $\oint_C xdy$

15 已知二維位能函數（potential function）滿足 Laplace's 方程式 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，今考慮一長方形邊界問題 $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$，其邊界條件爲 $u(0,y)=0,\ \ u(a,y)=0,\ \ u(x,0)=0,\ \ u(x,b)=f(x)$，利用分離變數法（separation of variables）$u(x,y)=F(x)G(y)$ 得其特徵函數（eigenfunction）爲：

(A) $\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{a}y)$　(B) $\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sinh(\frac{n\pi}{a}y)$

(C) $\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)$　(D) $\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sinh(\frac{n\pi}{b}y)$

16 $2xy^2 - 3 + (2x^2y + 4)\frac{dy}{dx} = 0$ 的解爲 $ax^2y^2 + bx + cy = k$，k 爲任意常數，求 $a+b+c=$？

(A) 2　(B) 4　(C) 6　(D) 8

17 設隨機變數 x 爲連續的，且其機率密度函數爲 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & elsewhere\end{cases}$，求條件機率 $P(x \le \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3})$。

(A) $\frac{5}{108}$　(B) $\frac{5}{36}$　(C) $\frac{5}{12}$　(D) $\frac{5}{6}$

18 已知機器 A, B, C 分別生產全部產品之 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$，又機器 A, B, C 生產之產品不良率爲 2%, 3%, 4%，則從所有產品中取一產品，問取中不良產品之機率爲何？

(A) $\frac{2}{75}$　(B) $\frac{3}{75}$　(C) $\frac{4}{75}$　(D) $\frac{5}{75}$

19 給定一個連續隨機變數 X，它的期望值（mean）爲 4，變異值（variance）爲 1。定義隨機變數 Y 爲 $Y = 4X - 2$，則 Y 的變異值爲何？

(A) 2　(B) 4　(C) 14　(D) 16

20 向量 $u = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 於向量 $v = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ 之投影（projection）爲何？

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{19}{9}$　(C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　(D) 3

測驗題標準答案

考試名稱： 98年 公務人員特種考試身心障礙人員考試
類科名稱： 電力工程
科目名稱： 工程數學（試題代號：5309）
題　　數： 20題
標準答案：

題序	01	02	03	04	05
答案	D	A	D	A	C

題序	06	07	08	09	10
答案	A	D	A	B	A

題序	11	12	13	14	15
答案	B	A	B	A	B

題序	16	17	18	19	20
答案	A	C	A	D	A

備　　註： 無更正紀錄。