

100年公務人員特種考試民航人員、外交領事人員及國際新聞人員、國際經濟商務人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員及社會福利工作人員考試試題

代號：60960

全一頁

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：數理組

科目：線性代數

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、下列那些向量空間同構於 \mathbb{R}^8 ？試說明理由。(20分)

(一)由 degree 小於或等於 8 的實係數多項式所組成的向量空間。

(二)由所有在 $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ 中，trace 為零的矩陣所組成的向量空間。

二、令 V 是由所有 $[0, 1]$ 送到 $[0, 1]$ 的可積函數所組成的向量空間。讓 W 是包括集合

$S = \{1, x, e^x\}$ 的最小子空間。在向量空間 V 上定義內積： $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ (30分)

(一)求 W 的維度並證明之。

(二)試找 W 的一組正交(orthogonal)基底。

三、令 $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 為一個線性映射，其定義為 $T(x, y, z, w) = (x + 2y, y + 3z, z + 4w)$ (20分)

(一)求 T 之零核空間(null space)的維度。

(二)求 T 的秩(rank)。

(三)試判斷 T 是否為一對一函數。

(四)試判斷 T 是否為映成(onto)函數。

四、令 $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ 為一函數，其定義為 $T(A) = A - A^t$ ，其中 A^t 為 A 的轉置矩陣(transpose)。令 $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ (30分)

(一)證明 T 是一個線性變換(linear transformation)。

(二)求 T 相對於基底 β 的矩陣表示。

(三)試判斷 T 是否可對角化。

(四)求 T 的Jordan正準形式(canonical form)和其對應之Jordan正準基底。