

101年公務人員特種考試外交領事人員外交行政人員考試、101年公務人員特種考試國際經濟商務人員考試、101年公務人員特種考試法務部調查局調查人員考試、101年公務人員特種考試國家安全局國家安全情報人員考試、101年公務人員特種考試民航人員考試、101年公務人員特種考試經濟部專利商標審查人員考試試題

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：電子組

科目：工程數學

考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、請應用留數定理 (Residue Theorem) 計算下列積分  $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$ 。(15分)

二、設  $T: R^3 \rightarrow R^3$  為一線性轉換 (linear transformation)，定義如下：

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x_1 + 5x_2 + ax_3 \end{cases} \quad (\text{其中 } a \text{ 為一常數})$$

(一)若  $T$  的反轉換 (inverse transformation) 存在，則常數  $a$  之值有何限制？(7分)

(二)設  $a = 1$ ，求  $T$  的反轉換。(8分)

三、假設有一曲線  $C$  如下： $C: \vec{R}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + 1\vec{k}$ ，其中  $0 \leq t \leq 2\pi$ ，求  $\int_C \vec{F} \times d\vec{\ell}$ ，

其中向量函數  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。(10分)

四、 $y$  為  $x$  的函數 ( $y = y(x)$ )，求下列微分方程式的通解：(10分)

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

乙、測驗題部分：(50分)

代號：6506

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共20題，每題2.5分，須用2B鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

- 1 對微分方程式的初始值問題 (initial value problem)  $xy'' + 1n(x^2 + 1)y' + (\sin x)y = \frac{e^{-x}}{x^2 - 9}$ ， $y(2) = 0$ ， $y'(2) = 1$

可以確定的是  $x$  在下列那一區間可保證有唯一解？

- (A)  $-3 < x < 3$                       (B)  $0 < x < 3$                       (C)  $-3 < x < \infty$                       (D)  $-\infty < x < \infty$

- 2 已知微分方程式  $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$  的通解為  $y(x) = e^{-3x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$ ，試求  $\alpha$ 、 $\beta$  之值，並判定下列何者正確？(題中  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $A$  及  $B$  為常數。)

- (A)  $\alpha + \beta = 13$                       (B)  $\alpha + \beta = 15$                       (C)  $\alpha + \beta = 17$                       (D)  $\alpha + \beta = 19$

- 3 下列何者為微分方程式  $\frac{dy}{dx} - (1 + \frac{1}{x})y - 2x + 2x^2 = 0$ ， $x \neq 0$ ，之通解？

- (A)  $y = 2x^2 + ce^x$ ，其中  $c$  為常數                      (B)  $y = 2x^2 + cxe^x$ ，其中  $c$  為常數  
(C)  $y = 2x + cx^2e^x$ ，其中  $c$  為常數                      (D)  $y = x^2(2 + ce^x)$ ，其中  $c$  為常數

- 4 若  $y(t)$  之拉氏轉換為  $Y(s) = \frac{s+11}{s^2+6s+13}$ ，試求  $y(t)$ ？

- (A)  $y(t) = e^{-3t}[\cos(2t) + 4\sin(2t)]$                       (B)  $y(t) = 4\cos(3t) + \sin(2t)$   
(C)  $y(t) = e^{-3t}[4\cos(2t) + \sin(2t)]$                       (D)  $y(t) = e^{-3t} + 4e^{-2t}$

- 5 微分方程式  $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 6x^{-3}e^x$  之解為  $y = e^x(a + bx + cx^{-1})$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為任意常數，求  $c$  值？

- (A) -2                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 6

- 6 對於微分方程式  $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 2\sin t + 4\cos t$ ，下列何者為錯？

- (A) 其穩態解 (steady state solution) 含有  $\sin t$                       (B) 其穩態解含有  $\cos t$   
(C) 其暫態解 (transient solution) 含有  $e^{-t} \sin t$  項                      (D) 其暫態解含有  $e^{-t} \cos t$  項

- 7 請問  $z=0$  是複變函數  $f(z) = \frac{1-e^{z^2}}{z^3}$  的幾階極點 (pole) ?
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 8 令複數  $z = x + iy$ ，試問方程式  $|z-1| = |z+i|$  其幾何圖形為何？
- (A) 圓形 (B) 橢圓 (C) 直線 (D) 雙曲線
- 9 令級數  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{4}\right)^n (z+i)^n$ ，請問其微分  $f'(z)$  的級數在下面那一區域收斂 (converge) ?
- (A)  $|z+i| < 4\sqrt{2}$  (B)  $|z+i| < 2\sqrt{2}$  (C)  $|z| < 2\sqrt{2}$  (D)  $|z+i| < 4$
- 10 設  $C$  的參數表示式為  $x = 2\cos(t)$  ;  $y = 2\sin(t)$  ;  $z = 3$ ，其中  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ，而其質量密度函數 (mass density function) 為  $\delta(x,y,z) = xy^2$ ，則其總質量為何？
- (A) 5 (B)  $\frac{16}{3}$  (C)  $3\sqrt{3}$  (D)  $\frac{3\pi}{8}$
- 11 試求向量場  $\mathbf{v} = \sinh(x-z)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + (z-y^2)\mathbf{k}$  的旋度 (curl) ?
- (A)  $-2y\mathbf{i} + \cosh(x-z)\mathbf{j}$  (B)  $2y\mathbf{i} + \cosh(x-z)\mathbf{j}$
- (C)  $2y\mathbf{i} - \cosh(x-z)\mathbf{j}$  (D)  $-2y\mathbf{i} - \cosh(x-z)\mathbf{j}$
- 12 若  $\mathbf{F}$  為  $R^3$  上之一常數向量，且  $x, y, z$  為變數，定義  $\mathbf{G} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ，則下列敘述何者錯誤？
- (A)  $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F}$  (B)  $\nabla \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{F}) = 3$  (C)  $\nabla \times (\mathbf{F} - \mathbf{G}) = \mathbf{0}$  (D)  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) = 3$
- 13 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ，下列選項何者正確？
- (A)  $A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 4^{100} \\ 0 & 3^{100} \end{bmatrix}$  (B)  $A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & -4^{100} \\ 0 & 3^{100} \end{bmatrix}$  (C)  $A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 4^{100} - 1 \\ 0 & 3^{100} \end{bmatrix}$  (D)  $A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 3^{100} - 1 \\ 0 & 3^{100} \end{bmatrix}$
- 14 設  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ；則  $A^k$  為何？其中  $k$  為正整數。
- (A)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$  (B)  $\begin{bmatrix} 1 & 1-2^k \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} 1 & 2^k - 1 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} 1 & -(2^k + 1) \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$

15 若  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是  $n \times n$  矩陣  $A$  的特徵值 (eigenvalue)， $a_{ij}$  是  $A$  內位置  $(i,j)$  的元素值，則下列何者為錯誤？

- (A)  $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \dots \times \lambda_n = \det(A)$                       (B)  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}$   
 (C)  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}$                       (D) 若  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，則  $e^A = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}$

16 若  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ，試求  $A^2 - B^3$ ？

- (A)  $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -11 & 12 \end{bmatrix}$                       (B)  $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -12 & 11 \end{bmatrix}$                       (C)  $\begin{bmatrix} 12 & 11 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$                       (D)  $\begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$

17 設  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，若矩陣  $A$  特徵值 (eigenvalue) 分別為  $\lambda_1 = 4$ ， $\lambda_2 = b$ ，下列何者可為特徵值  $\lambda_2$  對應之特徵向量 (eigenvector)？

- (A)  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$                       (B)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$                       (C)  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$                       (D)  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

18 兩連續隨機變數  $X$ 、 $Y$  之結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x+y), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{變異數 (variance) } \text{Var}(Y) = ?$$

- (A)  $\frac{13}{24}$                       (B)  $\frac{39}{64}$                       (C)  $\frac{13}{48}$                       (D)  $\frac{11}{24}$

19 兩連續隨機變數  $X$ 、 $Y$  之結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3x^2 + 2xy + 6Ay^2, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, A \text{ 為何?}$$

- (A)  $\frac{23}{32}$                       (B)  $-\frac{23}{32}$                       (C)  $\frac{25}{32}$                       (D)  $-\frac{25}{32}$

20 十元錢幣 A、B 共 2 枚，A 擲出後人像向上之機率為  $\frac{1}{10}$ ，B 則為  $\frac{1}{2}$ ，若自此 2 枚錢幣隨機挑選 1 枚然後擲出 2 次，在擲出 2 次皆為人像之前提下，被選之錢幣為 B 之機率為何？

(A)  $\frac{19}{26}$

(B)  $\frac{21}{26}$

(C)  $\frac{23}{26}$

(D)  $\frac{25}{26}$

# 測驗式試題標準答案

101年公務人員特種考試外交領事人員外交行政人員、國際經濟商務人員、法務部調查局  
考試名稱：調查人員、國家安全局國家安全情報人員、民航人員、經濟部專利商標審查人員考試及  
101年軍法官考試

類科名稱：電子組(選試英文)

科目名稱：工程數學(試題代號：6506)

題數：20題

標準答案：

題號	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	B	D	B	A	C	B	A	C	B	B	D	D	D	C	C	B	A	B	B	D

題號																				
答案																				

題號																				
答案																				

題號																				
答案																				

題號																				
答案																				

備註：