

101年公務人員特種考試外交領事人員外交行政人員考試、101年公務人員特種考試國際經濟商務人員考試、101年公務人員特種考試法務部調查局調查人員考試、101年公務人員特種考試國家安全局國家安全情報人員考試、101年公務人員特種考試民航人員考試、101年公務人員特種考試經濟部專利商標審查人員考試試題

代號：50760

全一頁

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：數理組

科目：線性代數

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、(一)是否有一線性映射 (linear transformation) $T: R^3 \rightarrow R^2$ 使得

$$T(1,0,3) = (2,-1) \text{ 且 } T(-3,0,-9) = (6,3) ? \quad (10 \text{ 分})$$

(二)假設 $T: R^2 \rightarrow R^2$ 且 $T(a_1, a_2) = (|a_1|, a_2)$ 。T 是否是一線性映射？試說明理由。(15分)

二、假設

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}。$$

求一多項式 $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ 使得 $f(A) = \mathbf{0}$ 。

此處 $f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I$ 。(20分)

三、假設

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}。$$

(一)令 λ 為 A 的最大固有值 (eigenvalue)。求 λ 。(10分)

(二)求 A 對應於固有值 λ 的固有向量 (eigenvector)。(10分)

(三)計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ 。(10分)

四、假設 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 且 $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$ 。

(一)求 $A^t A$ 之所有固有值，此處 A^t 是 A 的轉置 (transpose)。(10分)

(二)假設 $\|u\|_2 = 1$ ，此處 $\|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。求 $\max \|Au\|_2$ 。(15分)