

等 別：簡任
 類 科：物理
 科 目：力學研究
 考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、考慮一個質量為 m 的粒子因為受到下列的向心吸引力 \vec{F} 的作用，而作等速率圓周運動。

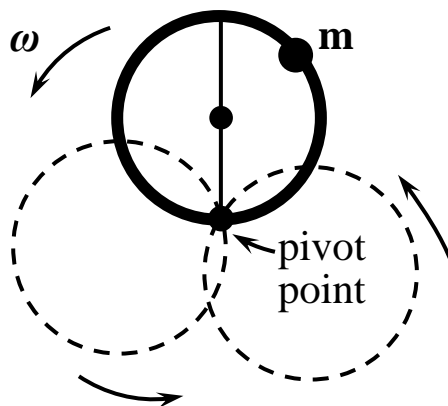
$$\vec{F}(\vec{r}) = -\hat{r}f(r) = -\hat{r}\frac{k}{r^2}, \quad k > 0$$

這裡 \vec{r} 表示粒子的位置向量， $r = |\vec{r}|$ 表示位置向量的長度，單位向量 \hat{r} 則定義為 $\hat{r} = \vec{r}/r$ ， k 表示大於零的常數。如果參數 k 突然間降為原值的一半，利用軌道方程式（令 $u(\theta) \equiv 1/r$ ， θ 為粒子的位置向量和運動平面上的 x 軸的夾角。）

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{mr^2}{L^2} f(r)$$

證明此粒子的運動軌道會變成拋物線的形狀。（30 分）

二、如圖，一個質量為 m 的粒子被限制只能在半徑為 R 的均勻圓環上運動。此圓環以角速率 ω 繞著圓環上的一個固定的樞軸（pivot point）旋轉。圓環上有一個虛擬的參考軸由樞軸處穿過圓心直到圓環的另一端。在不考慮重力場的情形下，試證明此質點在圓環上的運動，等同於一個處於均勻重力場下的平面擺（plane pendulum）的運動。（40 分）



三、考慮一個多粒子的系統。令 \vec{r}_a 以及 \vec{F}_a 分別代表第 a 個粒子的位置以及所受到的力， T 代表此粒子系統的總動能。依據 virial theorem，以下等式成立

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_a \vec{F}_a \cdot \vec{r}_a \right\rangle$$

等式裡括號 $\langle \rangle$ 表示該數量的時間平均值。請證明此 virial theorem。（30 分）