

等 別：薦任

類 科：天文

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程、向量分析）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)各題需詳列計算過程。

一、求出下列積分：（每小題 4 分，共 20 分）

$$(一) \int_1^2 (2x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$$

$$(二) \int_0^2 e^{2x} dx$$

$$(三) \int_0^{\pi/4} \sin(2x) dx$$

$$(四) \int_0^{\pi/4} \cos^2(x) \sin(x) dx$$

$$(五) \int_1^2 (\frac{2}{x}) dx$$

二、利用極座標（polar coordinates）求出半徑為 a 的圓的面積。（20 分）三、 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 5x + 2y$ 。（每小題 10 分，共 20 分）(一)求出 $f(x, y)$ 的極小值，以及出現此極小值時的 x, y 值。(二)在 $x = 2y$ 的限制下，求出 $f(x, y)$ 的極小值，以及出現此極小值時的 x, y 值。四、 $a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ，請用分離變數法求解 u ，其中 a, b 為兩個常數。（20 分）五、在一個二維的平面上，令向量場 $\vec{F} = (4x+2y)\vec{i} + (2x-3y)\vec{j}$ ，其中的 \vec{i} 與 \vec{j} 分別為沿 x 與 y 軸方向的單位向量。現在將 \vec{F} 沿著一個圓心在原點，半徑為 3 的圓的邊界，以逆時針方向積分一圈，結果為多少？（20 分）