

類 科：氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2 小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、考慮曲面方程式  $x^2 z^2 + x y^2 - z^3 + 4 y z - 5 = 0$ ，對此方程式假設我們有  $z = f(x, y)$  的關係式，試計算  $\frac{\partial z}{\partial x}$  及  $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。(10 分)

二、求積分  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} dx$ 。(10 分)

三、求重積分  $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos(x^5) dx dy$ 。(15 分)

四、假設  $V$  為由  $y = x^2$  及兩平面  $y + z = 4$ ， $z = 0$  所圍的有界區域，求此有界區域  $V$  的體積。(15 分)

五、求線積分  $\int_C (4 + e^{\sqrt{x}}) dx + (\sin y + 3x^2) dy$ ，其中  $C$  分別為半徑  $a$ ， $b$  的同心圓； $a < b$ ，在第一象限與  $x$  軸及  $y$  軸所圍的邊界。(10 分)

六、假設  $F(x, y)$  定義為  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ ， $C$  為平面上任意包含原點的平滑封閉曲線，試證明線積分  $\int_C F(x, y) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ 。(10 分)

七、假設  $S$  表示為  $z = 9 - x^2 - y^2$  曲面在  $z \geq 0$  的部分，令  $F(x, y, z) = (3x, 3y, z)$ ，計算  $F(x, y, z)$  經過  $S$  的通量 (flux)。(10 分)

八、求解起始值問題： $y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} - 10\cos(3x)$ ； $y(0) = 1$ ， $y'(0) = 2$ 。(20 分)