

類 科：氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、考慮曲面方程式 $x^2 z^2 + x y^2 - z^3 + 4 y z - 5 = 0$ ，對此方程式假設我們有 $z = f(x, y)$ 的關係式，試計算 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。(10 分)

二、求積分 $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 4}} dx$ 。(10 分)

三、求重積分 $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \cos(x^5) dx dy$ 。(15 分)

四、假設 V 為由 $y = x^2$ 及兩平面 $y + z = 4$ ， $z = 0$ 所圍的有界區域，求此有界區域 V 的體積。(15 分)

五、求線積分 $\int_C (4 + e^{\sqrt{x}}) dx + (\sin y + 3x^2) dy$ ，其中 C 分別為半徑 a ， b 的同心圓； $a < b$ ，在第一象限與 x 軸及 y 軸所圍的邊界。(10 分)

六、假設 $F(x, y)$ 定義為 $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ ， C 為平面上任意包含原點的平滑封閉曲線，試證明線積分 $\int_C F(x, y) \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ 。(10 分)

七、假設 S 表示為 $z = 9 - x^2 - y^2$ 曲面在 $z \geq 0$ 的部分，令 $F(x, y, z) = (3x, 3y, z)$ ，計算 $F(x, y, z)$ 經過 S 的通量 (flux)。(10 分)

八、求解起始值問題： $y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} - 10\cos(3x)$ ； $y(0) = 1$ ， $y'(0) = 2$ 。(20 分)