

類 科：氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、已知在點 (x, y, z) 的溫度為 $T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$ ，其中 T 的單位是攝氏， x, y 和 z 的單位是公尺。請回答下列問題：（15 分）

(一)求溫度的變化速率在點 $P(2, -1, 2)$ 和 P 到點 $(3, -3, 3)$ 的方向上。(二)求在那一個方向 P 點的溫度增加最快？(三)求在 P 點溫度增加最快的速率。

二、求 $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1} dy dx$ 。（10 分）

三、求 $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$ 在集合 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 的絕對極大值和絕對極小值。（10 分）

四、求 $x^2y'' - 5xy' + 8y = 2 \ln(x)$; $y(0) = \frac{3}{16}$, $y(e) = e^2 - e^4 + \frac{7}{16}$ 的解。（15 分）

五、已知 $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$, $C: \mathbf{r}(t) = \langle t + \sin \frac{1}{2}\pi t, t + \cos \frac{1}{2}\pi t \rangle$, $0 \leq t \leq 1$ 。請回答下列問題：（20 分）

(一)求滿足 $\mathbf{F} = \nabla f$ 的函數 f 。(二)求 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 。

六、用分離變數法求

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ y(0, t) = y(1, t) = 0, & t > 0, \\ y(x, 0) = x(x^2 - 1), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 1, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

的解。（30 分）