

類 科：電力工程、電子工程、醫學工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、令 $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ t+1, & t \geq 3 \end{cases}$ ，試求 $f(t)$ 之拉氏轉換 (Laplace transform)。(10 分)

二、設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ，

(一)求 A 的特徵值 (eigenvalues)。(5 分)

(二)求 A 的特徵向量 (eigenvectors)。(5 分)

(三)求 A^{100} 。(5 分)

三、試解微分方程 $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln x$ ，其中 $x > 0$ ， $y' = \frac{dy}{dx}$ ， $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ ，
以下類推。(15 分)

四、設 $\mathbf{v} = xy\mathbf{i} - 4z\mathbf{j} + zy\mathbf{k}$ 及 $A = (0, 1, 0)$ 、 $B = (2, 0, 1)$ 、 $D = (3, 2, 1)$ 等三點，若 C 為由 A 到 B 及 B 到 D 兩直線線段所組成。

求 $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{R} = \int_C (xydx - 4dy + zydz) = ?$ (10 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：2304

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 試求聯立微分方程式 $\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 之通解？

(A) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ ，其中 c_1, c_2 為常數

(B) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ ，其中 c_1, c_2 為常數

(C) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}$ ，其中 c_1, c_2 為常數

(D) $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$ ，其中 c_1, c_2 為常數

9 若 \mathbf{A} 及 \mathbf{B} 皆為正交矩陣 (orthogonal matrix)，則下列敘述何者不恆真？

- (A) 矩陣 \mathbf{AB} 也必為正交矩陣
 (B) 矩陣 $\mathbf{A+B}$ 也必為正交矩陣
 (C) 矩陣 \mathbf{A}^{-1} 也必為正交矩陣
 (D) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})^{-1}$ (其中 $\det \mathbf{X}$ 表矩陣 \mathbf{X} 的行列式值)

10 轉換 $T: R^2 \rightarrow R^3$ 定義為 $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y+2 \\ x-y+1 \\ x+3y+3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathbf{B}$ ，則：

(A) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (B) $\mathbf{A}^T \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$

(C) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (D) $\mathbf{A}^T \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

11 設 A 為 3×3 的矩陣，若 A 的行列式值 $\det(A) = 3$ ，則 $\det(-2A)$ 之值為何？

- (A) -6 (B) 6 (C) 24 (D) -24

12 令矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ 且 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{10}$ ，則下列敘述何者錯誤？

- (A) $\mathbf{BB}^T = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$
 (B) 若 $\theta = \pi/10$ ，則矩陣 \mathbf{B} 為單位矩陣 (unit matrix)
 (C) 無論 θ 為何值，矩陣 \mathbf{B} 及 \mathbf{B}^{-1} 的特徵值 (eigenvalue) 之絕對值均為 1
 (D) 無論 θ 為何值，矩陣 \mathbf{B} 及 \mathbf{B}^{-1} 的行列式值 (determinant) 均為 1

13 兩連續隨機變數 X 、 Y 之結合機率密度函數 (joint probability density function) 為

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 求 } P(X < Y) = ?$$

- (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{6}$

14 一個盒子中有 998 個黑球及 2 個白球，若自盒中隨機挑選 500 球，令 x 為其中白球之數量，試求條件機率 $P(x=1 | x=1 \text{ 或 } x=2) = ?$

- (A) $\frac{499}{1499}$ (B) $\frac{1000}{1499}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

- 15 給定一個常態分布 (Normal Distribution) 的隨機變數 X ，它的期望值 (mean) 為 0，變異值 (variance) 為 5。已知 $P(X > C) = 0.05$ ，也就是 X 大於 C 的機率為 0.05。求 $P(-C < X < C)$ 之值為何？
- (A) 0.90 (B) 0.95 (C) 0.975 (D) 0.995
- 16 若 X 為一連續隨機變數 (continuous random variable)，其機率密度函數 (probability density function) 為 $f_X(x) = \begin{cases} kx(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，試求 $k = ?$
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6
- 17 求 $\lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/3}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$ 之值為何？
- (A) $\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$ (B) $\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$ (C) $\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$ (D) $\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i$
- 18 請計算 $\frac{2^{12}}{(1-i)^{20}}$ 之值，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。
- (A) $-4 + 4i$ (B) $4i$ (C) -4 (D) 4
- 19 若 $\varphi(x, y, z) = xy - yz + xyz$ ，則其在點 $P = (0, -1, 1)$ 之最大改變率 (rate of change) 之值為何？
- (A) -2 (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{6}$
- 20 已知三向量 $\mathbf{a} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 、 $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ， $(\mathbf{b} + 2\mathbf{c}) \times \mathbf{a}$ 等於：
- (A) $-4\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ (B) $4\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ (C) $4\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ (D) $-4\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

測驗式試題標準答案

考試名稱：100年公務人員高等考試三級考試暨普通考試

類科名稱：電力工程、醫學工程、電子工程

科目名稱：工程數學（試題代號：2304）

題數：20題

標準答案：

題號	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	A	C	D	A	B	A	D	A	B	B	D	B	C	B	A	D	A	C	D	A

題號																				
答案																				

題號																				
答案																				

題號																				
答案																				

題號																				
答案																				

備註：