

類 科：核子工程

科 目：微積分與微分方程

考試時間：2 小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

以下每題都需要寫出詳細過程，每一小題獨立計分。

令  $i = \sqrt{-1}$ ， $x$ 、 $y$  和  $z$  皆為實數。

一、(一)令  $F(x, z) = \int_0^{z^2} \tan^{-1} \frac{y}{x} dy$ ，求  $\frac{\partial F}{\partial z}$ 。(10 分)

(二)求  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{ix})^{ix}$ 。(15 分)

二、求  $(ix)^3 y''' + 2ixy' - 4iy + ix^4 = 0$  (Cauchy 型) 之通解。(20 分)

三、求  $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$  在曲面  $x^2 + y^2 + z^2 = 14$  上之極大值和極小值，用 Lagrange 法。(20 分)

四、證明圓錐曲面  $z^2 = x^2 + y^2$  和球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  在每一個相交點  $p(x, y, \pm 1)$  皆為正交 (Orthogonal)，也就是兩曲面在  $p$  點之二切面的法線 (Normal Lines) 為垂直。(20 分)

五、令  $G(z) = L[g(x)] = \int_0^{\infty} e^{-zx} g(x) dx$ ，求反拉氏變換  $L^{-1} \left[ \ln(1 + \frac{i^2}{z^2}) \right]$ ，用  $-\frac{d}{dz} \left[ \ln(1 + \frac{i^2}{z^2}) \right]$ 。(15 分)