

類 科：氣象

科 目：微積分

考試時間：1 小時 30 分

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

以下每題都需要寫出詳細過程，每一小題獨立計分。

令 $i = \sqrt{-1}$ ， x 、 y 和 z 皆為實數。一、(一)求 $\int x^i dx$ 。(5 分)(二)求 $\int x^i \cdot x^{i^2} \cdot x^{i^3} \cdots x^{i^{99}} dx$ 。(10 分)二、(一)求 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \ln x - x^{1.1})$ 。(5 分)(二)求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ix^x}{e^{-x^{1.1}}} dx$ 。(10 分)三、令 (r, θ) 為點 (x, y) 之極坐標且 $-\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1} \frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{2}$ ，(一)若 $-3\pi < \theta < -\frac{5\pi}{2}$ ，用圖形及說明，證明 $\theta = -\tan^{-1} \frac{x}{y} - \frac{5\pi}{2}$ 。(10 分)(二)用 $i \tan^{-1} z = \int_0^z \frac{i}{1+t^2} dt$ 及 $\frac{1}{1+t^2}$ 之等比級數，求 $i + \frac{i^3}{3} + \frac{i^5}{5} + \frac{i^7}{7} + \cdots$ 。(15 分)四、求 $f(x, y) = x + y + 10$ 在等高線 $x^3 y + xy^3 = 20000$ 上之最小值，其中 x 與 y 為正值。依以下步驟回答：令 $G(x, y) = x^3 y + xy^3$ (一)用 Lagrange 乘子法，求 $\frac{\partial G}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial G}{\partial y}$ 之相關等式。(5 分)(二)隱微分 $G(x, y) = 20000$ ，說明此等高線在第一象限為下降且向上凹之曲線。(10 分)(三)用 $G(x, y) = 20000$ 之對稱性及(二)，求 $f(x, y)$ 之最小值。(10 分)五、(一)將圓柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 化為極坐標等式。(5 分)(二)畫出由橢圓拋物面 $z = 10 - x^2 - y^2$ 及(一)之柱面和平面 $z = 0$ 所包圍立體區域 S 之略圖。(5 分)(三)求 S 之體積。(10 分)