

101年特種考試地方政府公務人員考試試題
等 別：三等考試
類 科：統計、經建行政、農業行政、交通技術
科 目：統計學
考試時間：2小時

代號：31580
31880
32080
34980

全一張
(正面)

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、假設某個地區的野鴿有 10% 得了禽流感。隨機選取 5 隻野鴿做檢驗，令 X 等於其中得了禽流感的數目。

(一)假設獨立性， X 的機率分配為何？(10 分)

(二)求 $P(X=1)$ 。(5 分)

(三)求 $P(X \geq 3)$ 。(5 分)

二、令 X_1, X_2, \dots, X_n 為取自隨機變數 X 的一組隨機樣本且 X 具有定義在區間 $(\theta-2, \theta+2)$ 上之均勻分配。

(一)求 θ 的動差法估計量。(10 分)

(二)你在(一)部分所求得估計量是 θ 的一個不偏估計量嗎？(5 分)

(三)給定下列 X 的 5 個觀察值：

6.52 7.34 6.18 8.45 9.26

求 θ 的一個點估計值。(5 分)

三、據稱有 60% 的牙醫師對他的病人推薦某種品牌的牙膏。某個消費者團體質疑該項聲明並決定檢定假設 $H_0: p=0.60$ 相對於對立假設 $H_1: p < 0.60$ ，其中 p 為推薦該品牌牙膏的牙醫師比例數。一項 400 位牙醫師的調查中發現 210 位推薦該品牌牙膏。

(一)若顯著水準為 $\alpha=0.05$ 你會接受那個假設呢？請詳述檢定過程與結論。(15 分)

(二)若顯著水準為 $\alpha=0.01$ 你會接受那個假設呢？(須說明理由)(5 分)

註：標準常態分配的百分位數：

1. 標準常態分配的第 95 個百分位數 $z_{0.05}=1.645$

2. 標準常態分配的第 99 個百分位數 $z_{0.01}=2.326$

(請接背面)

101年特種考試地方政府公務人員考試試題 代號：
31580 全一張
31880 (背面)
32080
34980

等 別：三等考試
類 科：統計、經建行政、農業行政、交通技術
科 目：統計學

四、陳醫師擔任某家大型醫院的檢驗師。他最近檢驗了 25 名女性的膽固醇指數並記錄得下列值：

164	272	261	248	235	192	203	278	268
230	242	305	286	310	345	289	326	
335	297	328	400	228	194	338	252	

假設這些資料代表取自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一組隨機樣本觀察值。

(一) 計算這些資料的樣本平均數及樣本變異數。(10分)

(二) 求 μ 的一個 90% 信賴區間。(5分)

(三) 求 σ^2 的一個 90% 信賴區間。(5分)

註：

1. 自由度為 24 的 t 分配的第 90 個百分位數 $t_{0.10}(24) = 1.318$

2. 自由度為 24 的 t 分配的第 95 個百分位數 $t_{0.05}(24) = 1.711$

3. 自由度為 24 的卡方分配的第 90 個百分位數 $\chi_{0.05}^2(24) = 36.415$

4. 自由度為 24 的卡方分配的第 10 個百分位數 $\chi_{0.95}^2(24) = 13.848$

五、阿里山有位茶農想知道三月份降雨量與春茶最終收成量之間是否線性相關。他連續 5 年記錄了三月份降雨量和每年的春茶收成量，結果如下表所示：

三月份降雨量與春茶收成量資料表

年份	2006	2007	2008	2009	2010
x (降雨量, 毫米)	29	41	30	28	32
y (收成量, 公斤)	136	168	150	134	142

(一) 求 x 與 y 的線性相關係數。(10分)

(二) 利用最小平方法求 y 對 x 的迴歸直線。(10分)

申論題解答

一、

擬答：(一) 隨機選取 5 隻野鴿，且 X 為得禽流感數目：

抽到的鴿子得禽流感的機率為 10%，連續有 X 隻得到的機率為 0.1^X

抽到的鴿子無禽流感的機率為 90%，連續有數隻沒得到的機率為 0.9^{5-X}

每隻鴿子都是相互獨立，所以 X 機率分配為：

$$P(X) = C_X^5 (0.1)^X (0.9)^{5-X}$$

$$\begin{aligned} \text{(二)} P(X=1) &= C_1^5 (0.1)^1 (0.9)^{5-1} \\ &= 5 \times 0.1 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \\ &= 0.32805 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(三)} P(X \geq 3) &= P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\ &= C_3^5 (0.1)^3 (0.9)^{5-3} + C_4^5 (0.1)^4 (0.9)^{5-4} + C_5^5 (0.1)^5 (0.9)^{5-5} \\ &= 10 \times 0.00081 + 5 \times 0.00009 + 1 \times 0.00001 \\ &= 0.00856 \end{aligned}$$

二、

$$\text{擬答：(一)} f(X) = \begin{cases} \frac{1}{\theta+2-(\theta-2)}, & \theta-2 \leq X \leq \theta+2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

X 的一階原動差：

$$\mu'_1 = E(X) = \frac{\theta+2+\theta-2}{2} = \theta$$

樣本的一階原動差：

$$m'_1 = \bar{x}$$

$$\mu'_1 = \bar{x} \rightarrow \theta = \bar{x}$$

也就是 θ 的動差估計量是 \bar{x} (樣本平均數)。

$$\text{(二)} E(X) = \frac{\theta+2+\theta-2}{2} = \theta$$

$$\begin{aligned} E(\bar{x}) &= E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} [E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)] \\ &= \frac{1}{n} \times n\theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

所以是不偏估計量。

$$\text{(三)} \frac{6.52 + 7.34 + 6.18 + 8.45 + 9.26}{5} = 7.55$$

三、

$$\text{擬答：(一)} \hat{p} = \frac{210}{400} = 0.525$$

$$H_0 : p = 0.6$$

$$H_1 : p < 0.6$$

$$\text{拒絕域} = \{Z \mid Z < -Z_{0.05} = -1.645\}$$

$$Z = \frac{0.525 - 0.6}{\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{400}}} = -3.06 < -1.645$$

所以拒絕相信 H_0 ，也就是沒有 60% 的牙醫師推薦該品牌牙膏。

$$(二) Z = \frac{0.525 - 0.6}{\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{400}}} = -3.06 < -Z_{0.01} = -2.326$$

所以還是拒絕相信 H_0 ，也就是接受 H_1 。

四、

擬答：(一) 25 位記錄值：

1. 樣本平均數 \bar{X} ：

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 164 + 272 + 261 + 248 + 235 + 192 + 203 + 278 + 268 + 230 + 242 + 305 + 286 + 310 + 345 + 289 + 326 + \\ &\quad 335 + 297 + 328 + 400 + 228 + 194 + 338 + 252 \\ &= 6,824 \end{aligned}$$

$$\bar{X} = \frac{6,824}{25} = 273.04$$

2. 樣本變異數 S^2 ：

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2 \\ &= \frac{1}{24} \times 75732.96 \\ &= 3155.54 \end{aligned}$$

$$S = 56.174$$

(二) 此題為常態母體、 σ 未知，所以用 t 分配：

$$t \text{ 分配自由度} = 25 - 1 = 24$$

μ 的 90% 信賴區間為：

$$\begin{aligned} & \left[\bar{X} - t_{0.05}(24) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{0.05}(24) \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \\ &= \left[273.04 - 1.711 \times \frac{56.174}{\sqrt{25}}, 273.04 + 1.711 \times \frac{56.174}{\sqrt{25}} \right] \\ &= [253.8173, 292.2627] \end{aligned}$$

(三) 此題 μ 未知，所以用卡方分配：

$$\text{卡方分配自由度} = 25 - 1 = 24$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.05}^2(24)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{0.95}^2(24)} \right] \\ &= \left[\frac{24 \times 3155.54}{36.415}, \frac{24 \times 3155.54}{13.848} \right] \\ &= [2079.719, 5468.873] \end{aligned}$$

五、

$$\text{擬答：(一) } \bar{x} = \frac{29 + 41 + 30 + 28 + 32}{5} = 32$$

$$\bar{y} = \frac{136 + 168 + 150 + 134 + 142}{5} = 146$$

$$\begin{aligned} \text{相關係數} &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} \\ &= \frac{268}{\sqrt{110} \sqrt{760}} \\ &= 0.9269 \end{aligned}$$

最小平方法可得：

$$SSE = \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \rightarrow \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0 \rightarrow n \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum x_i = \sum y_i$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \rightarrow \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) x_i = 0 \rightarrow \hat{\beta}_0 \sum x_i + \hat{\beta}_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i$$

以上兩式解聯立（利用 crame rule）可得：

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{268}{110}$$

$$= 2.4364$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$= 68.036$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x = 68.036 + 2.4364x$$