代號：34170 | 34370
頁次：4－1

101年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程、電信工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）
(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、設 $\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。

(一)試求矩陣 A 特徵值 λ_1，λ_2。（2 分）

(二)若 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$，試求矩陣 P。（3 分）

(三)求解 $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$，$t \geq 0$。（10 分）

二、設曲線 C 的參數表示式為 $x = 2\cos(t)$；$y = 2\sin(t)$；$z = 3$，其中 $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$，而沿其 C 曲線之質量密度函數（mass density function）為 $\delta(x,y,z) = xy^2$，求其質量中心為何。（15 分）

三、令 f 及 g 為向量空間 $C[a,b]$ 上之實數連續函數，定義 $C[a,b]$ 上的內積為 $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$。設 $f(x) = x$，$g(x) = x^2$，$a = 0$，$b = 1$

(一)求 $\|f\|$。（5 分）

(二)求 f 與 g 間之距離 $d(f,g)$。（5 分）

四、隨機變數 X 之期望值（expected value）$E(X)=2$，變異數（variance）$Var(X)=4$，求：

(一)$E[(3+2X)^2]$＝？（5 分）

(二)$Var[5+3X]$＝？（5 分）

代號：34170 | 34370
頁次：4－2

乙、測驗題部分：（50 分）　　代號：7341

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

A 1 下列何者爲函數 $f(t)=\cos(2t+10)$ 之拉氏轉換？

(A) $\frac{1}{s^2+4}[s\cos(10)-2\sin(10)]$ (B) $\frac{1}{s^2+4}[\cos(10)-2\sin(10)]$

(C) $\frac{2}{s^2+4}[s\cos(10)-\sin(10)]$ (D) $\frac{1}{s^2}[s\cos(10)-2\sin(10)]$

A 2 已知 $y_1=x^2$ 及 $y_2=x-1$ 爲 $(x^2-2x)y''+2(1-x)y'+2y=0$ 之兩獨立解。則下列何者爲 $(x^2-2x)y''+2(1-x)y'+2y=6(x^2-2x)^2$ 之通解？

(A) $c_1x^2+c_2(x-1)+x^4-4x^3$，其中 c_1 及 c_2 爲任意常數

(B) $c_1x^2+c_2(x-1)-\frac{27}{10}x^6+\frac{61}{5}x^5-9x^4$，其中 c_1 及 c_2 爲任意常數

(C) $c_1x^2+c_2(x-1)-\frac{1}{5}x^6+\frac{21}{5}x^5-9x^4$，其中 c_1 及 c_2 爲任意常數

(D) $c_1x^2+c_2(x-1)-5x^4+8x^3$，其中 c_1 及 c_2 爲任意常數

C 3 已知微分方程式 $y'+\alpha y=g(x)$ 的通解爲 $y(x)=ce^{-3x}+2xe^{-3x}$，其中 α、c 爲常數，g(x)爲未知函數，求 α 及 g(x)。

(A) $\alpha=-3, g(x)=2xe^{-3x}$ (B) $\alpha=-3, g(x)=4e^{-3x}$

(C) $\alpha=3, g(x)=2e^{-3x}$ (D) $\alpha=3, g(x)=4xe^{-3x}$

B 4 函數 $f(t)$ 之拉氏轉換（Laplace transform）爲 $L\{f(t)\}$，令 $F(s)=L\left\{\int_0^t e^{-3\tau}\cos 2(t-\tau)d\tau\right\}$，則 $F(2)$ 等於何值？

(A) 1/40 (B) 1/20 (C) 1/4 (D) 1/2

D 5 已知微分方程式 $x^2y'+3xy=\frac{1}{x}, x>0, y(1)=-1$，其解爲：

(A) $y=x^2-2x^{-3}$ (B) $y=x^2+2x^{-3}$ (C) $y=x^{-2}-2$ (D) $y=x^{-2}-2x^{-3}$

代號：34170

34370

頁次：4-3

D 6 令複數 $z=x+iy$，則方程式 $z^2+\bar{z}^2=2$ 之幾何圖形爲何？

(A)橢圓 (B)拋物線 (C)圓形 (D)雙曲線

B 7 設複數 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 z^{40} 之值爲何？

(A) 1 (B) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$

C 8 假設複數 $z=x+iy$，已知 $z^c=e^{c\log z}$，其中 c 爲任意複數值（complex number），試問 $(-i)^i$ 的主要值（principal value）爲何？

(A) $e^{\frac{-\pi}{2}}$ (B) 1 (C) $e^{\frac{\pi}{2}}$ (D) 0

D 9 假設路徑 C 爲一逆時針方向的半圓形封閉路徑的邊界，其數學定義式爲 $z=2e^{i\theta}(0\le\theta\le\pi)$，試求 $\int_C \frac{z+2}{z}dz$ 之值。

(A) $2\pi i$ (B) $4\pi i$ (C) $4+2\pi i$ (D) $-4+2\pi i$

A 10 有一曲面 $z^2=x^2-y^2$，下列何者爲經過點（1,1,1）且爲該曲面之法線向量？

(A) $2i-2j-2k$ (B) $2i+2j-2k$ (C) $-2i+2j-2k$ (D) $-2i-2j-2k$

A 11 在溫度場（temperature field）中，已知熱流（heat flow）之方向爲溫度變小最急遽（maximum decrease）的方向，今有一溫度場 $T(x,y,z)=\frac{z}{x^2+y^2}$，其於點 $P(0,1,2)$ 之熱流方向爲何？

(A) $[0,\ 4,\ -1]$ (B) $[0,\ -4,\ 1]$ (C) $[1,\ 0,\ 4]$ (D) $[-1,\ 0,\ -4]$

A 12 下列何者爲線積分 $\int_C xyzds$ 之值？其中 C 的參數化表示式爲 $x=2t$；$y=2t$；$z=t+3$，而 $0\le t\le 1$，$S(t)$ 爲曲線 C 之長度函數。

(A) 15 (B) $15\sqrt{2}$ (C) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{15}{2}$

C 13 設 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 3 & -2\\ -1 & 4 & 1 & -1\\ 0 & 5 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，試求矩陣 **A** 與 **B** 之秩（rank）相加值爲何？

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

D 14 下列何者錯誤？

(A)在 R^2 空間中，0 向量正交於所有的向量
(B)在 R^3 空間中，0 向量正交於所有的向量
(C)向量 $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ 正交於向量 $\begin{bmatrix}-4\\6\end{bmatrix}$
(D)向量 $\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$ 正交於向量 $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

C 15 若 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，則 $A^n=$？

(A) $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix}n&n\\n&n\end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{bmatrix}$
(D) $\begin{bmatrix}2^n&2^n\\2^n&2^n\end{bmatrix}$

B 16 若 $A=\begin{bmatrix}1&3&-1&1\\0&2&1&-1\\0&-4&5&1\\0&2&-1&1\end{bmatrix}$，試求行列式 $|A|$ 之值。

(A) 22
(B) 24
(C) 26
(D) 28

C 17 若 $A=\begin{bmatrix}1&4&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&-2&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，試求 A 所有特徵值相加之值。

(A) −1
(B) 1
(C) 2
(D) 4

B 18 兩連續隨機變數 X、Y 之結合機率密度函數（joint probability density function）為
$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求機率 $P(Y\le 0.2\mid X=0.4)$。

(A) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{1}{4}$
(C) $\frac{1}{6}$
(D) $\frac{1}{8}$

A 19 若 X 為一連續隨機變數（continuous random variable），其機率密度函數（probability density function）為
$f_X(x)=\begin{cases}\frac{6}{5}x(1+x), & 0<x<1\\ 0, & otherwise\end{cases}$，試求 $p(x\le\frac{1}{2})$。

(A) $\frac{1}{5}$
(B) $\frac{1}{3}$
(C) $\frac{3}{7}$
(D) $\frac{1}{2}$

A 20 假設兩個隨機變數 (X,Y) 均勻分布在單位圓的內部，其聯合機率密度函數（joint probability density function）為 $f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & otherwise\end{cases}$，試算出隨機變數 X 的期望值（mean）為何？

(A) 0
(B) 0.5
(C) 1
(D) $1/\pi$

❏ 申論題解答

1.(一) 特徵方程式 $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,\quad \lambda = 4, -1$

【答】特徵值 $\lambda_1 = 4,\quad \lambda_2 = -1$

(二) $\lambda_1 = 4,\quad \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad 3x_1 = 2x_2$，$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -1,\quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad x_1 = -x_2$，$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

設 $P = [X_1 \quad X_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$，$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

則 $P^{-1}AP = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

【答】 $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

(三)設 $X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}X + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix},\quad S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},\quad X = SY$

$Y' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}Y + S^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$

$y_1' = 4y_1 + \frac{1}{5}e^{2t},\quad y_1 = c_1 e^{4t} - \frac{1}{10}e^{2t}$，解得 $C_1 = \frac{1}{10}$

$y_2' = -y_2 - \frac{2}{5}e^{2t},\quad y_2 = c_2 e^{-t} - \frac{2}{15}e^{2t}$，解得 $C_2 = \frac{2}{15}$

$X = SY,\quad X = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}e^{4t} + \frac{2}{15}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-t} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{15} \end{bmatrix}e^{2t}$

$$X=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}e^{4t}+\frac{2}{15}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-t}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{6}\end{bmatrix}e^{2t}$$

【答】 $\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}e^{4t}+\frac{2}{15}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{2t}\\\frac{3}{10}e^{4t}-\frac{2}{15}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{2t}\end{bmatrix}$

二. $\bar{x}=\frac{M_x}{M},\quad \bar{y}=\frac{M_y}{M},\quad \bar{z}=\frac{M_z}{M}$

$\vec{r}(t)=2\cos t\ \vec{i}+2\sin t\ \vec{j}+3\vec{k},\quad \dot{\vec{r}}(t)=-2\sin t\ \vec{i}+2\cos t\ \vec{j}$

$ds=\sqrt{\dot{\vec{r}}(t)\cdot\dot{\vec{r}}(t)}d(t)=2t$

$M=\int_c xy^2ds=\int_c xy^2\cdot 2dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t)(2\sin t)^2 2dt$

$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)(\sin^2 t)dt=16\left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{3}$

$M_x=\int_c x\cdot xy^2ds=\int_c x^2y^2\cdot 2dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t)^2(2\sin t)^2 2dt$

$=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t)(\sin^2 t)dt=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t)^2dt=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1-\cos 4t}{2})dt$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=4\left[t-\frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi$

$M_y=\int_c y\cdot xy^2ds=\int_c xy^3\cdot 2dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t)(2\sin t)^3 2dt$

$=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)(\sin^3 t)dt=32\left[\frac{\sin^4 t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=8$

$M_z=\int_c z\cdot xy^2ds=\int_c 3xy^2ds=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t)(2\sin t)^2 2dt$

$=48\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)(\sin^2 t)dt=48\left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=16$

$$\bar{x}=\frac{2\pi}{\frac{16}{3}}=\frac{3}{8}\pi,\quad \bar{y}=\frac{8}{\frac{16}{3}}=\frac{3}{2},\quad \bar{z}=\frac{16}{\frac{16}{3}}=3$$

【答】$(\frac{3}{8}\pi,\frac{3}{2},3)$

三.(一) $\langle f,f\rangle=\int_0^1 f(x)^2dx=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

$$\text{norm}\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\sqrt{\int_0^1 f(x)^2dx}=\sqrt{\frac{1}{3}}$$ 【答】$\sqrt{\frac{1}{3}}$

(二) $\int_0^1 f(x)^2dx=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$，$\int_0^1 g(x)^2dx=\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{5}$

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

$$\langle f-g,f-g\rangle=\int_0^1[f(x)-g(x)]^2dx$$

$$=\int_0^1 f(x)^2dx-2\int_0^1 f(x)g(x)dx+\int_0^1 g(x)^2dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$$

$$d(f,g)=\|f-g\|=\sqrt{\langle f-g,f-g\rangle}=\sqrt{\frac{1}{30}}$$ 【答】$\sqrt{\frac{1}{30}}$

四.(一) $E(2x+3)=2E(x)+3=2\times2+3=7$

$Var(2x+3)=4Var(x)=4\times4=16$

$$E\left[(2x+3)^2\right]=Var(2x+3)+E[(2x+3)]^2=16+49=65$$

【答】$E\left[(3x+5)^2\right]=65$

(二) $Var(3x+5)=9Var(x)=9\times4=36$

【答】$Var(3x+5)=36$