

102年公務人員特種考試外交領事人員及外交行政人員  
考試、102年公務人員特種考試法務部調查局調查人員  
考試、102年公務人員特種考試國家安全局國家安全情  
報人員考試、102年公務人員特種考試民航人員考試、  
102年公務人員特種考試經濟部專利商標審查人員考試試題

代號：50930 全一頁

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：數理組

科目：數論

考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、令  $n$ 、 $m$  為正整數。證明  $\frac{(nm)!}{(n!)^m}$  為一整數。(20分)

二、(一)某正整數  $n$  除以 11 餘 1、除以 13 餘 2、除以 15 餘 3，則滿足這些條件的最小正整數為  $n = 1068 = \frac{11 \times 13 \times 15 - 9}{2}$ 。試驗證之。(8分)

(二)試求一最小正整數  $n$ ，使其除以 9 餘 8、除以 17 餘 14、除以 25 餘 20、除以 33 餘 26。(12分)

三、(一)求所有正整數  $n$ ，滿足“比  $n$  小，且與  $n$  互質的正整數共有  $\frac{2n}{7}$  個”的性質。(8分)

(二)求所有正整數  $n$ ，滿足“比  $n$  小，且與  $n$  互質的正整數共有 60 個”的性質。(12分)

四、(一)欲分別將 998 及 999 表成兩正整數的立方差（即呈  $a^3 - b^3$  的形式）。若可以，請找出所有表法。若不可以，請說明理由。(15分)

(二)找出一數  $n$ ， $n$  不等於 998，999，使其表成正整數立方差的方法不只一種。（可利用(一)的結果。）(5分)

五、令  $p$  為形如  $2^{4n} + 1$  的質數（ $n$  為正整數）。試證 7 必為  $F_p^*$  的原根（primitive root），即 7 在  $\text{mod } p$  之下的階數（order）為  $p-1$ 。(20分)