102年特種考試地方政府公務人員考試試題　　代號：31470　全一張（正面）

等　　別：三等考試

類　　科：統計

科　　目：迴歸分析

考試時間：2小時　　座號：____________

※注意：㈠可以使用電子計算器。

㈡不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、對以下之簡單線性迴歸模式

$$Y_i = 1 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,\sigma^2), i = 1,\ldots,n,$$

X_i 為已知自變數（independent variable）且不全為 0。令 $\hat{\beta}_1$ 是參數 β_1 之最小平方估計量（least squares estimator）及 $\alpha = e^{\beta_1}$。（每小題 10 分，共 20 分）

㈠請找出參數 α 之最大概式估計量（maximum likelihood estimator）。

㈡請求出 $\hat{\beta}_1$ 之期望值 $E(\hat{\beta}_1)$ 及變異數 $Var(\hat{\beta}_1)$（請詳列推導過程）。

二、$(x_i, y_i), i = 1,\ldots,10,$ 為對應以下簡單線性迴歸模式

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \varepsilon_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,\sigma^2), i = 1,\ldots,10,$$

之觀察值。對以下 x_i 值時，y_i 有重覆觀察值：

x_i 值	重覆觀察 y_i 值
90	81, 83
66	68, 60, 62
51	60, 64
35	51, 53

令 $\hat{\beta}_0$、$\hat{\beta}_1$ 為 β_0 及 β_1 之最小平方估計量之值。給定以下結果：

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 44249, \sum_{i=1}^{10} (y_i - \hat{y}_i)^2 = 118.44, \hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i 。$$

㈠試完成以下對應虛無假設（null hypothesis）

$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = 0$ 之變異數分析表（ANOVA table）：(1)～(8)

來源	自由度（degree of freedom）	平方和（sum of squares）	均方和（mean square）	F
迴歸（Regression）	2	(3)	(6)	(8)
殘差（Error）	(1)	(4)	(7)	
總和	(2)	(5)		

並寫出 F 統計量之虛無分布（null distribution），即 F 統計量在虛無假設成立時之機率分布。（15 分）

㈡請算出缺適（lack of fit or goodness of fit）檢定統計量之值。並明確寫出檢定統計量之虛無分布。（10 分）

（請接背面）

等　　別：三等考試
類　　科：統計
科　　目：迴歸分析

三、$(x_{i1}, x_{i2}, y_i), i = 1, \ldots 4,$ 為對應以下多重線性迴歸模式

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i, \varepsilon_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2), i = 1, \ldots, 4,$$

之觀察值。令$\hat{\beta}_0$、$\hat{\beta}_1$及$\hat{\beta}_2$為β_0、β_1及β_2之最小平方估計量或其值。X 為自變數矩陣，

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} \\ 1 & x_{31} & x_{32} \\ 1 & x_{41} & x_{42} \end{bmatrix}。$$

給定以下之結果：

$$X^t X = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0 \\ -1.5 \end{bmatrix}, \sum_{i=1}^{4} (y_i - \hat{y}_i)^2 = 0.5,$$

$$\sum_{i=1}^{4} y_i = 10, \hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2}。$$

㈠算出$\hat{\beta}$之共變異數矩陣（covariance matrix），即$Cov(\hat{\beta}, \hat{\beta})$。（5 分）

㈡算出R^2。（5 分）

㈢給定$\alpha = 0.05$，利用 t 統計量檢定

$H_0 : \beta_2 + 1 \geq 0$ versus $H_0 : \beta_2 + 1 < 0$。（10 分）

（$t_{2,0.05} = 2.92, t_{2,0.025} = 4.303, t_{1,0.05} = 6.314, t_{1,0.025} = 12.706$）

㈣給定$\alpha = 0.05$，利用 F 統計量檢定

$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ versus $H_1 : \beta_0 \neq 0$ or $\beta_1 \neq 0$ or $\beta_2 \neq 0$。（10 分）

（$F_{3,1,0.05} = 216, F_{3,2,0.05} = 19.2, F_{2,1,0.05} = 200, F_{2,2,0.05} = 19$）

㈤算出β_1之 95％之信賴區間。（5 分）

四、考慮以下多重線性迴歸模式

$$Y_i = \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_p X_{ip} + \varepsilon_i, \varepsilon_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2), i = 1, \ldots, n。$$

令

$$Y = [Y_1 \quad Y_2 \quad \cdots \quad Y_n]^t, X_j = [X_{1j} \quad X_{2j} \quad \ldots \quad X_{nj}]^t, j = 1, \ldots, p。$$

假設$X_{ij}, i = 1, \ldots n,$ 不全為 0 且$X_j^t X_k = 0, j \neq k$。

㈠試以Y及X_j來表示$\beta_1, \ldots, \beta_p$之最小平方估計量以及殘差平方和（residual sum of squares）。（12 分）

㈡考慮另一線性迴歸模式$Y_i = \alpha_1 X_{i1} + \alpha_2 X_{i2} + \cdots + \alpha_p X_{ip} + \zeta_i, i = 1, \ldots, n,$
$\zeta_i \sim N(0, a^2\sigma^2)$為彼此獨立之隨機誤差且$a$為正常數。試求以$Y$及$X_j$來表示$\alpha_1, \ldots, \alpha_p$之加權最小平方估計量（weighted least squares estimator），且找出此加權最小平方估計量與在㈠之$\beta_1, \ldots, \beta_p$最小平方估計量之關係式。（8 分）