代號：33970
34070
頁次：4－1

102年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　　別：三等考試
類　　科：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　座號：

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、求 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的最小平方解（least squares solution），其中 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$ and $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\0\\-3\end{bmatrix}$。（10 分）

二、利用留數（residue）觀念，試求 $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$ 之值。（10 分）

三、若 C 為從（1, 1, 1）到（−2, 1, 3）之直線段，且 $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，求 $\int_C \boldsymbol{F}\bullet d\boldsymbol{R}$。（15 分）

四、已知 $f(x)=x, 0<x<2\pi$ 且 $f(x)=f(x+2\pi)$，求 $f(x)$ 之傅立葉半幅正弦展開式。（15 分）

代號：33970
34070
頁次：4–2

乙、測驗題部分：（50 分） 代號：7339

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。

㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

B 1 下列何者爲拋物柱面 $z = x^2$ 之位置向量參數表示式，其中 u，v 爲變數？

(A) $u\mathbf{i} + u\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$ (B) $u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$ (C) $v\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$ (D) $v\mathbf{i} + v\mathbf{j} + v^2\mathbf{k}$

B 2 下列何者爲 $\oint_C 2x\cos(2y)dx - 2x^2\sin(2y)dy$ 之值，其中 C 爲一圓：$x^2 + y^2 = 4$（定義逆時針方向爲正）？

(A) $-3\sqrt{2}$ (B) 0 (C) $3\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{7}$

B 3 試求向量場 $\mathbf{v} = \sinh(x-z)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + (z-y^2)\mathbf{k}$ 的 $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{v})$ 值？

(A) -2 (B) 0 (C) $\sinh(x-z)$ (D) $2y$

D 4 有一矩陣 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，則以下何者爲行列式 $\det(B^5)$ 的值？

(A) 1 (B) 5 (C) 32 (D)-32

B 5 下列矩陣何者非屬基本矩陣（elementary matrices）？

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

B 6 在螺旋圓弧線 $\mathbf{r}(t) = [3\cos t, 3\sin t, 4t]$ 之上，從點 P: (3, 0, 0)到點 Q: $(-3, 0, 20\pi)$的弧線長（arc length）爲何？

(A) 20π (B) 25π (C) 30π (D) 40π

C 7 以下那一組是由基底 $\mathbf{B} = \{[3 \quad 4], [1 \quad 0]\}$ 經由 Gram-Schmidt 正交程序轉換而成的正交基底？

(A) $\left\{[3 \quad 4], \left[\frac{1}{3} \quad \frac{-1}{4}\right]\right\}$ (B) $\left\{[3 \quad 4], \left[\frac{15}{24} \quad \frac{-15}{32}\right]\right\}$

(C) $\left\{[3 \quad 4], \left[\frac{16}{25} \quad \frac{-12}{25}\right]\right\}$ (D) $\left\{[3 \quad 4], \left[\frac{-8}{22} \quad \frac{6}{22}\right]\right\}$

A 8 令矩陣 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$，試問下列何者不是 A 的特徵向量（eigenvector）？

(A) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

代號：33970
34070
頁次：4-3

A 9 令$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$爲一複數級數（complex series），則下列敘述何者錯誤？

(A)若$\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$，則$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$收斂
(B)若$\lim_{n\to\infty} Z_n \neq 0$，則$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$發散
(C)若$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$收斂，則$\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$
(D)若級數$\sum_{n=1}^{\infty} |Z_n|$收斂，則$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$亦收斂

D 10 有關複數的性質，何者錯誤？

(A)一個複數的實部（real part）是實數
(B)一個複數的虛部（imaginary part）是實數
(C) $|z|+|w| \geq |z+w|$，其中z,w爲複數
(D) $z\bar{z} = z^2$，其中z爲複數

D 11 令$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$爲一複數冪級數（complex power series），其中常數z_0爲此級數展開式的中心點（center）。若已知此冪級數的收斂半徑爲R，則下列敘述何者錯誤？

(A)此冪級數在中心點$z=z_0$必定收斂
(B)此冪級數在所有符合$|z-z_0|<R$的複數z皆收斂
(C)此冪級數在所有符合$|z-z_0|>R$的複數z皆發散
(D)此冪級數在所有符合$|z-z_0|=R$的複數z皆收斂或皆發散

B 或 D 12 一微分方程式$y' - y = e^{2x}$，下列何者錯誤？

(A)該方程式爲線性微分方程式
(B)該方程式爲白努利方程式（Bernoulli equation）
(C) $y = e^{2x} + ce^x$爲該方程式之解
(D)該方程式爲齊次（homogeneous）微分方程式

C 13 若微分方程$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x + x - x^2$之特別解(particular solution)爲$y_p = a + bx + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}e^x$，求$a+b$值？

(A) $\frac{2}{27}$
(B) $-\frac{2}{27}$
(C) $-\frac{1}{27}$
(D) 0

A 14 兩個函數$f_1 = \sin^2 x$，$f_2 = 1 - \cos 2x$，$x \in (-\infty, \infty)$，請問下列何者錯誤？

(A)它們不是線性相依
(B)它們的 Wronskian 爲 0
(C)它們不是線性獨立
(D)它們的 Wronskian 爲$\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1-\cos 2x \\ 2\sin x\cos x & 2\sin 2x \end{vmatrix}$

答案以正式公告為準

C 15 下列何者為函數 $f(x)=\begin{cases}-1, 當 -\pi<x<0\\ 1, 當 0\le x<\pi\end{cases}$ 之傅立葉級數？

(A) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}\sin nx$

(B) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}\cos nx$

(C) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx$

(D) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\cos nx$

A 16 如微方程式 $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ 有一僅有 y 的函數之積分因子（integrating factor），下列何者恆真？

(A) $\frac{1}{M(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x})$ 也是僅有 y 的函數

(B) $\frac{1}{M(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial y})$ 也是僅有 y 的函數

(C) $\frac{1}{N(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x})$ 也是僅有 y 的函數

(D) $\frac{1}{N(x,y)}(\frac{\partial M(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial y})$ 也是僅有 y 的函數

C 17 定義函數 $f(t)$ 之拉氏轉換（Laplace transform）$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$，令 $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}$，則 $f(t)$ 為何？其中 $u(t)$ 為單位步階（unit step）函數：

(A) $te^{-3(t-2)}u(t-2)$　(B) $(t-2)e^{-3t}u(t-2)$　(C) $(t-2)e^{-3(t-2)}u(t-2)$　(D) $te^{-3t}u(t-2)$

C 18 假設隨機變數 X 的機率密度函數為 $f(x)=\begin{cases}k\sqrt{x}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，試求出 k 的值為何？

(A) 1/2　(B) 2/3　(C) 3/2　(D) 1

B 19 自一副 52 張撲克牌中取出 3 張牌，試求取出之牌中出現多於 1 張 K 之機率為何？

(A) $\frac{53}{5525}$　(B) $\frac{73}{5525}$　(C) $\frac{93}{5525}$　(D) $\frac{113}{5525}$

B 20 給定一個隨機變數 X，其機率密度函數為 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x}{2}, & -1<x<1\\ 0, & \text{elsewhere}\end{cases}$；試問一個隨機變數 $Y=X^2$，其機率密度函數 $g(y)$ 為何？

(A) $g(y)=\left(1+\sqrt{y}\right)/2$，$0<y<1$

(B) $g(y)=1/\left(2\sqrt{y}\right)$，$0<y<1$

(C) $g(y)=\left(1-\sqrt{y}\right)/2$，$0<y<1$

(D) $g(y)=1$，$0<y<1$

申論題解答

1. 由 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{A}^T\mathbf{b}$ ，$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&5\\5&6\end{bmatrix}$

$\therefore\begin{bmatrix}6&5\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，解得 $\bar{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$。

2. $\oint_c\frac{1}{z^2+1}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx+0=2\pi i\operatorname{Re}s(i)=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}=\pi$

$\therefore\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\pi$。

3. 直線之參數式：$\begin{cases}x=-3t+1\\y=1\\z=2t+1\end{cases}$, $0\le t\le 1$，$\therefore\begin{cases}dx=-3dt\\dy=0\\dz=2dt\end{cases}$

$\therefore I=\int_0^1\left[(-3t+1)\vec{i}+\vec{j}+(2t+1)\vec{k}\right]\cdot\left[-3\vec{i}+2\vec{k}\right]dt=\int_0^1(13t-1)dt=\left[\frac{13}{2}t^2-t\right]_0^1=\frac{11}{2}$。

4. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{nx}{2}$，$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\sin\frac{nx}{2}dx=\frac{4(-1)^{n+1}}{n}$。