

102年公務人員特種考試外交領事人員及外交行政人員
考試、102年公務人員特種考試法務部調查局調查人員
考試、102年公務人員特種考試國家安全局國家安全情
報人員考試、102年公務人員特種考試民航人員考試、
102年公務人員特種考試經濟部專利商標審查人員考試試題

代號：70370 全一張
(正面)

考試別：專利商標審查人員

等別：三等考試

類科組：資訊工程

科目：離散數學

考試時間：2小時

座號：_____

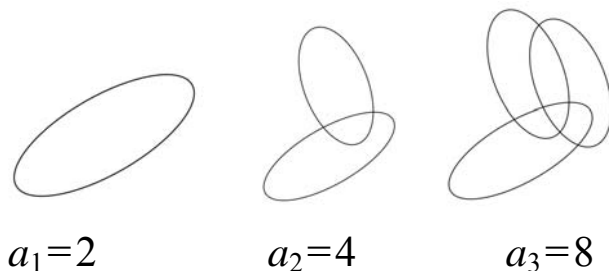
※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、平面上有 n 個環形，已知環形兩兩相交於相異兩點，並且任何三環形不會相交於一點。這些環形將平面分割成為若干區域，如下圖所示，以 a_n 來表示所分割成的區域個數。我們觀察得到 $a_1=2, a_2=4, a_3=8$ 等。

(一)試求出 a_4 ，並說明 $a_n=a_{n-1}+2(n-1)$ 。(10分)

(二)直接求出 a_n 的通式；或藉觀察 $2=1^2-1+2, 4=2^2-2+2, 8=3^2-3+2$ ，推測 a_n 的通式，並予以證明。(10分)



二、(一)說明在一個邊長為 1 的正三角形裏，任選 5 點，必有兩點相距不超過 $1/2$ ；任選 10 點，必有兩點相距不超過 $1/3$ 。(10分)

(二)若在邊長為 1 的正三角形裏，任選 $f(n)$ 點，必有兩點相距小於或等於 $1/n$ ，試決定滿足此一性質的最小正整數 $f(n)$ 的通式。(10分)

三、自正整數集合 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 依序隨機選取 n 次，每次每個元素被選取的機率一樣。試求：

(一)所得數列正好有 n 個相異整數出現的機率。(10分)

(二)所得數列正好有 $n-1$ 個相異整數出現的機率。(10分)

(請接背面)

102年公務人員特種考試外交領事人員及外交行政人員
考試、102年公務人員特種考試法務部調查局調查人員
考試、102年公務人員特種考試國家安全局國家安全情
報人員考試、102年公務人員特種考試民航人員考試、
102年公務人員特種考試經濟部專利商標審查人員考試試題

代號：70370 全一張
(背面)

考試別：專利商標審查人員
等別：三等考試
類科組：資訊工程
科目：離散數學

四、(一)在下面三個集合之間，分別建立一一對應關係：

多重集合 (multiset) $\{a_1^\infty, a_2^\infty, \dots, a_k^\infty\}$ (即每一元素 a_i 可不限次數出現) 的所有 r 個元素子集合；方程式 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$ 的非負整數解 (x_1, x_2, \dots, x_k) ；及有 r 個 1 和 $k-1$ 個 * 的多重集合的所有重排 (permutations)。(10 分)

(二)試分別針對 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_k \geq 0$ 和 $x_1 \geq a_1, x_2 \geq a_2, \dots, x_k \geq a_k$ 兩種情況，求出方程式 $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$ 的非負整數解 (x_1, x_2, \dots, x_k) 的個數。(10 分)

五、若 Q_n 是一個以 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i = 0, 1\}$ 為頂點集合，兩頂點 $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)$ 相鄰若且唯若 $\{i | i \leq n, x_i, y_i \text{ 不相等}\}$ 的元素個數為 1 的圖形。

(一)試分別畫出圖形 Q_2, Q_3 ，並在其上分別給出漢彌頓迴圈 (Hamilton circuits)。(10 分)

(二)說明如何利用 Q_{n-1} 的漢彌頓迴圈，造出 Q_n 的漢彌頓迴圈。(10 分)