代號：35920
36020
36120
38420
頁次：4－1

102 年公務人員高等考試三級考試試題

類　科：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程
科　目：工程數學
考試時間：2 小時　　座號：

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）
(一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、線性方程組以矩陣的符號寫成 $AX=B$，令

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 5 & -1 & 0\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-4\\ 0\\ 6\end{bmatrix};$$

(一)利用高斯消去法求解 $AX=B$。（5 分）

(二)利用反矩陣（matrix inverses）方法求解 $AX=B$。（5 分）

(三)利用 Cramer's 法則（Cramer's rule）求解 $AX=B$。（5 分）

二、複數函數 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+4)}$

(一)求 $f(z)$ 以 $z=1$ 為中心展開的羅倫級數（Laurent series）。（7 分）

(二)求 $f(z)$ 在 $z=1$ 的留數（residue）。（3 分）

三、求解下列微分方程式：

(一) $y''-10y'+25y=0$ 之通解（general solution）。（5 分）

(二) $y''+4y=8$； $y(\pi/4)=y(\pi/2)=1$ 之解。（5 分）

(三) $x^3y'''+x^2y''-4y'=0$ 之通解。〔註：$x>0$〕（5 分）

代號：35920
36020
36120
38420
頁次：4－2

四、兩個隨機變數 X 與 Y 之結合機率密度函數（joint probability density function）為

$$f_{XY}(x,y)=x+y;\ \begin{matrix}0<x<1\\0<y<1\end{matrix};\ f_X(x)=x+\frac{1}{2};\ f_Y(y)=y+\frac{1}{2}$$

(一)求 X 與 Y 之共變異數（covariance），$Cov[X,Y]$。（7 分）

(二)求 X 與 Y 之相關係數（correlation coefficient），$\rho_{X,Y}$。（3 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　代號：2303

(一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
(二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

D 1 有一曲線之參數方程式為 $x=2\cos t$，$y=2\sin t$，$z=\sqrt{5}t$，其中 $0\le t\le 2\pi$，請問該曲線弧長為何？

(A) 2π　(B) 3π　(C) 4π　(D) 6π

C 2 下列何者為線積分 $\int_C yzdx+xzdy+xydz$ 之值，其中曲線 $C: x=t^2$；$y=t$；$z=t+3$，而 $0\le t\le 1$？

(A) $2\sqrt{3}$　(B) $3\sqrt{2}$　(C) 4　(D) 3

A 3 下列何者為 $\varphi=2xz+e^yz^2$ 在點 $(2,1,1)$ 於 $2i+3j-k$ 之方向上之方向導數（directional derivative）？

(A) $e/\sqrt{14}$　(B) e　(C) $\sqrt{14e}$　(D) $1/\sqrt{e}$

D 4 下列集合中之向量，何者為線性獨立（linear independent）？

(A) $\{(1,1),(1,2),(3,4)\}$
(B) $\{(1,3),(2,0),(-1,3),(7,3)\}$
(C) $\{(2,3,0),(1,-2,4),(1,1,0),(1,1,1)\}$
(D) $\{(2,0,1,-3),(0,1,1,1),(2,2,3,0)\}$

A 5 若 $\varphi(x,y,z)=xy-yz+xyz$，則其在點 $P=(0,-1,1)$ 於方向 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 的改變率（rate of change）為何？

(A) -2　(B) 2　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{6}$

B 6 若 $\mathbf{A}$ 是 $n\times n$ 的對稱實數矩陣，則下列那一項是錯的？

(A) $\mathbf{A}$ 一定可以對角化
(B)其特徵值不會有相同的
(C)其特徵值一定是實數
(D) $\mathbf{A}$ 的行列式值等於其所有特徵值之乘積

代號：35920
36020
36120
38420
頁次：4－3

C 7 設 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 爲任二 $n\times n$ 矩陣，則下列敘述何者不恒真？

(A) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$

(B) $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

(C)若 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{B}$ 均爲對稱矩陣（symmetric matrix），則 $\mathbf{AB}$ 及 $\mathbf{BA}$ 也必爲對稱矩陣

(D) $\mathbf{AA}^T$ 及 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 均爲對稱矩陣

D 8 令矩陣 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -4\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}$，其逆矩陣 $\mathbf{A}^{-1}$ 表爲 $[bij]$，則下列何者錯誤？

(A) $b_{12}=\frac{3}{32}$ (B) $b_{21}=\frac{-1}{4}$ (C) $b_{23}=\frac{3}{4}$ (D) $b_{32}=\frac{-1}{2}$

A 9 若 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 則 $\mathbf{B}^2=\mathbf{O}$；試求 $e^{\mathbf{B}t}=$？

(A) $\begin{bmatrix}1 & -t\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1 & e^{-t}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1 & -e^{-t}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}1 & te^{-t}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

C 10 設 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 均爲 3×3 的矩陣，若 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 的行列式值分別爲 $\det(\mathbf{A})=-2$、$\det(\mathbf{B})=3$。則 $\det(-2\mathbf{AB})$ 之值爲何？

(A) 12 (B) -12 (C) 48 (D) -48

D 11 試計算 $i^{(i^2-i)}$ 之值，其中 $i=\sqrt{-1}$：

(A) $e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$，n 爲任意整數

(B) $-e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$，n 爲任意整數

(C) $i\cdot e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$，$n$ 爲任意整數

(D) $-i\cdot e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$，$n$ 爲任意整數

B 12 複數函數 $f(z)=|z|^2$ 在下列何點可微分？

(A) $z=-1$ (B) $z=0$ (C) $z=1$ (D) $z=i$

代號：35920
36020
36120
38420
頁次：4－4

D 13 求複變函數積分 $\int_C |z| dz$ 之值，其中積分路徑 C 為複數平面上由原點至點 $2-2i$ 的直線，其中 $i=\sqrt{-1}$：

(A) $\sqrt{2}(1+i)$ (B) $\sqrt{2}(1-i)$ (C) $2\sqrt{2}(1+i)$ (D) $2\sqrt{2}(1-i)$

B 14 求解微分方程 $5y''-3.5y'+0.6y=0$，其解為：

(A) $y=c_1e^{-0.4x}+c_2e^{0.3x}$ (B) $y=c_1e^{0.4x}+c_2e^{0.3x}$ (C) $y=c_1e^{0.4x}+c_2e^{-0.3x}$ (D) $y=c_1e^{-0.4x}+c_2e^{-0.3x}$

B 15 求解微分方程 $y^{(4)}-29y''+100y=0$，其解為：

(A) $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}$
(B) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3e^{5x}+c_4e^{-5x}$
(C) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3e^{2x}+c_4xe^{2x}$
(D) $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3e^{5x}+c_4xe^{5x}$

C 16 微分方程式 $x^3(1-x)y''+2xy'+y=\sin(x)$ 有幾個奇異點（singular points）？

(A) 2 個 (B) 3 個 (C) 4 個 (D)無窮多個

B 17 求解微分方程 $y'+y=y^2$，其解為：

(A) $y=1+ce^{x}$ (B) $y=1/(1+ce^{x})$ (C) $y=1-ce^{x}$ (D) $y=1/(1-ce^{x})$

C 18 令 X 及 Y 為均勻（uniformly）分布於 $(0,1)$ 之二獨立（independent）連續隨機變數（continuous random variable），試求 $P\left(|X-Y|\le\frac{1}{5}\right)=$？

(A) $\frac{7}{16}$ (B) $\frac{8}{25}$ (C) $\frac{9}{25}$ (D) $\frac{5}{16}$

B 19 $F(s)$ 為 $f(t)$ 之拉普拉斯（Laplace）轉換，則 $u(t-a)f(t-a)$ 之拉普拉斯轉換為何？其中 $u(t)$ 為單位步階函數及 $a>0$：

(A) $e^{as}F(s)$ (B) $e^{-as}F(s)$ (C) $F(s-a)$ (D) $F(s+a)$

C 20 隨機變數 X 之期望值（expected value）$\mathrm{E}(X)=3$，變異數（variance）$\mathrm{Var}(X)=5$，則 $\mathrm{E}(3+4X+5X^2)=$？

(A) 38 (B) 65 (C) 85 (D) 93

❑ 申論題解答

102 公務人員高等考試三級考試

程翎教授解題

類別：電力工程.電子工程.電信工程.醫學工程

科目：工程數學

申論題部分：

一.(一)【解】增廣矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$，$\begin{matrix} R_{12}(-1) \\ R_{13}(-5) \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 26 \end{bmatrix}$

$$R_{23}(1) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 30 \end{bmatrix}，R_3(-\frac{1}{5}) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+z=-4 \\ y=4 \\ z=-6 \end{cases} \quad □□ \begin{cases} x=2 \\ y=4 \\ z=-6 \end{cases}$$

(二)【解】 □$AX=B$， □$X=A^{-1}B$

$$\det(A)=\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}=-5，\ \det(A)=-5$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 5 & -5 & 0\\ -6 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$X=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 5 & -5 & 0\\ -6 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\ 0\\ 6\end{bmatrix}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}-10\\ -20\\ 30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ -6\end{bmatrix}$$

解得 $x=2,\quad y=4,\quad z=-6$

(三)【解】

$$\Delta=\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 5 & -1 & 0\end{bmatrix}=-5,\qquad \Delta_x=\det\begin{bmatrix}-4 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 6 & -1 & 0\end{bmatrix}=-10$$

$$\Delta_y=\det\begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 5 & 6 & 0\end{bmatrix}=-20，\Delta_z=\det\begin{bmatrix}1 & 0 & -4\\ 1 & 1 & 0\\ 5 & -1 & 6\end{bmatrix}=30$$

Cramer's 公式：$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-10}{-5}=2$，$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-20}{-5}=4$

$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{30}{-5}=-6$，解得 $x=2,\quad y=4,\quad z=-6$

二.(一)【解】 (1) $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+4)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z+4}$

□$z-1=t,\quad z=t+1$

$$f(t)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{t}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{t+5},\quad 0<|t|<5$$

$$f(t)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{t}-\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{5}}$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{t}-\frac{1}{25}\left(1-\frac{t}{5}+\frac{t^2}{25}-\frac{t^3}{125}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{5t}-\frac{1}{25}+\frac{1}{125}t-\frac{1}{625}t^2+\cdots$$

$$f(z)=\frac{1}{5(z-1)}-\frac{1}{25}+\frac{1}{125}(z-1)-\frac{1}{625}(z-1)^2+\cdots\;;\;0<|z-1|<5$$

(2) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+4)}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{z+4}$

□$z-1=t,\quad z=t+1$

$$f(t)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{t}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{t+5},\quad 5<|t|$$

$$f(t)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{t}-\frac{1}{5t}\cdot\frac{1}{1+\frac{5}{t}}$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{t}-\frac{1}{5t}(1-\frac{5}{t}+\frac{25}{t^2}-\frac{125}{t^3}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{t^2}-\frac{5}{t^3}+\frac{25}{t^4}-\cdots$$

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{5}{(z-1)^3}+\frac{25}{(z-1)^4}-+\cdots\;;\;5<|z-1|$$

(二)【解】 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+4)}$

$z=0$ 本性奇點(Essential Singular Point)

$$\operatorname{Res}_{z\to a} f(z)=\lim_{z\to a}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right],$$ □中$a=1,\quad m=1$

$$\operatorname{Res}_{z\to 1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{(z-1)(z+4)}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z+4)}=\frac{1}{5}$$

□: $\operatorname{Res}_{z\to 1} f(z)=\dfrac{1}{5}$

三.(一)【解】設 $y_H(x)=e^{mx},\quad y'_H(x)=me^{mx},\quad y''_H(x)=m^2e^{mx}$

代入 $y''-10y'+25y=0$

$m^2-10m+25=0$，$m=5$，5(重根)

□$y_H(x)=c_1e^{5x}+c_2xe^{5x}$

□ : $y(x)=c_1e^{5x}+c_2xe^{5x}$

(二)【解】 設 $y_H=e^{mx}$， $y_H'=me^{mx}$， $y_H''=m^2e^{mx}$

代入 $y''+4y=0$

$m^2+4=0$， $m=\pm 2i$

則 $y_H=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

□$y_P=C$， $y_P''=0$

代入 $y''+4y=8$， $4C=8$， $C=2$

$y=y_H+y_P=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+2$

□$y(\frac{\pi}{4})=1$， $c_1\cos\frac{\pi}{2}+c_2\sin\frac{\pi}{2}+2=1$

$y(\frac{\pi}{2})=1$， $c_1\cos\pi+c_2\sin\pi+2=1$

□□$c_1=1$， $c_2=-1$

□$y=\cos 2x-\sin 2x+2$

□ : $y=\cos 2x-\sin 2x+2$

(三)【解】設 $y_H=x^m$， $y_H'=mx^{m-1}$， $y_H''=m(m-1)x^{m-2}$

$y_H'''=m(m-1)(m-2)x^{m-3}$

代入 $x^3y'''+x^2y''-4xy'=0$

$m(m-1)(m-2)+m(m-1)-4m=0$

$m(m^2-2m+3)=0$

$m(m^2-2m+3)=0$， $m=0,-1,3$

□$y_H=c_1+c_2x^{-1}+c_3x^3$

□ : $y=c_1+c_2x^{-1}+c_3x^3$

四.兩個隨機變數 X、Y(random variables)，結合機率密度函數
(joint probability density function)

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1,\quad 0<y<1 \\ 0\ , & \square\square \end{cases}$$

求(一) Covariance of X 和 Y ：Cov(X,Y)

(二)相關係數 ρ_{XY} 。

(一)【解】

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy\cdot(x+y)dxdy=\frac{1}{3}$$

$$f_X(x)=\int_0^1 (x+y)dy=x+\frac{1}{2},\quad 0<x<1$$

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot(x+\frac{1}{2})dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\Big|_0^1=\frac{7}{12}$$

$$f_Y(y)=\int_0^1 (x+y)dx=y+\frac{1}{2},\quad 0<y<1$$

$$E(Y)=\int_0^1 y\cdot(y+\frac{1}{2})dy=\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{4}\Big|_0^1=\frac{7}{12}$$

$$Cov(XY)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12}=-\frac{1}{144}$$

(二)【解】

$$E(X^2)=\int_0^1 x^2\cdot(x+\frac{1}{2})dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}\Big|_0^1=\frac{5}{12}$$

$$E(Y^2)=\int_0^1 y^2\cdot(y+\frac{1}{2})dy=\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{6}\Big|_0^1=\frac{5}{12}$$

$$Var(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{5}{12}-(\frac{7}{12})^2=\frac{11}{144},\quad \sigma_x=\sqrt{\frac{11}{144}}$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=\frac{5}{12}-(\frac{7}{12})^2=\frac{11}{144},\quad \sigma_Y=\sqrt{\frac{11}{144}}$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}}\sqrt{\frac{11}{144}}}=-\frac{1}{11}$$

$$\square:(\square)-\frac{1}{144};\quad (\square)-\frac{1}{11}$$