

等 別：三等考試

類 科：經建行政、工業行政、農業行政、交通技術

科 目：統計學

考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、設  $X$  與  $N$  為兩個離散隨機變數， $N \sim P(\lambda)$ ， $X|_{N=n} \sim \text{Bin}(n, p)$ 。

(一)試求  $X$  之邊際分配，需說明分配名稱及參數。(10分)

(二)1. 計算  $X$  之動差母函數， $M_X(t)$ 。(5分)

並由此計算：

2.  $E(X)$ 。(5分)

3.  $E(X^2)$ 。(5分)

二、設  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ， $i=1, 2, \dots, n$ ，為一組獨立之常態分配。

(一)試說明：

1.  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$  之精確分配。(10分)

2. 計算期望值  $E\left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \right)$ 。(5分)

3. 變異數  $\text{Var}\left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \right)$ 。(5分)

(二)當  $n \rightarrow \infty$ ，試寫出  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$  之極限分配。(5分)

三、若  $\{X_i\}_1^n \sim U(\theta, 1)$  為一組來自均勻分配在區間  $(\theta, 1)$  之獨立同態的隨機樣本。

(一)試寫出  $\theta$  之參數空間。(5分)

(二)1. 試求  $\theta$  之動差估計式， $\widehat{\theta}_{MM}$ 。(5分)

2. 試求一常數  $c$  使  $c\widehat{\theta}_{MM}$  為  $\theta$  之一不偏估計式。(5分)

(三)試求  $\theta$  之最大概似估計式， $\widehat{\theta}_{MLE}$ 。(10分)

四、設  $\{(x_i, Y_i)\}_{i=1}^n$  滿足一無截距之簡單線性迴歸模型  $Y_i = \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ，設  $E(\varepsilon_i) = 0$ ， $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ ， $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ ， $i \neq j$ 。

(一)試求  $\beta_1$  之最小平方估計式 (LSE)。(10分)

(二)吾人若欲對此模型作推論，則於  $\varepsilon_i$  需加上何種分配的假設？(5分)

(三)在題(二)之假設下，給定  $\alpha \in (0, 1)$  之顯著水準，如何檢定此迴歸線是否顯著？(10分)