

類 科：統計
科 目：統計學
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器，須詳列解答過程。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

本試題可能使用之參考值如下： $z_{0.025} = 1.96$ ， $z_{0.05} = 1.645$ ， $z_{0.1} = 1.28$

一、從一付撲克牌（共 52 張）以抽後不放回的方式隨機抽出 2 張，令 X 代表紅桃之張數， Y 代表黑色牌之張數。

(一)試求 X 與 Y 之聯合機率分配。（5 分）

(二)分別求出 X 與 Y 之邊際機率分配。（10 分）

(三)求出 Y 給定 $X=1$ 之下的條件機率分配。（5 分）

(四)求出 Y 給定 $X=x$ 之下的條件機率分配。（5 分）

二、令 X_1, X_2, \dots, X_n 為一組隨機抽自均勻分配（Uniform distribution）之樣本，其機率密度函數為

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \forall x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

令 \bar{X} 代表樣本平均數。

(一)試以動差法求得 θ 的點估計。（5 分）

(二)試求 θ 的充分統計量。（5 分）

(三)試求 θ 的最大概似估計。（5 分）

(四)試驗證 θ 的最大概似估計並非 θ 的不偏估計。（5 分）

(五)將 θ 的最大概似估計記作 $\tilde{\theta}$ 。試求 c 使得 $c\tilde{\theta}$ 為 θ 的不偏估計。（5 分）

(六)令(五)中之不偏估計為 $\check{\theta}$ 。並令 $\hat{\theta} = 2\bar{X}$ 。分別求 $\check{\theta}$ 與 $\hat{\theta}$ 的變異數。（10 分）

(七)當 $n > 1$ ，說明是否 $\check{\theta}$ 相對於 $\hat{\theta}$ 的相對效率（relative efficiency）大於 1？（5 分）

(請接背面)

類 科：統計
科 目：統計學

三、王老師想瞭解學生在經過他所設計之聽力訓練後，英文聽力是否有進步，全班學生在訓練前與訓練後分別接受難易度相似的英聽測驗。隨機從班上抽出 20 名學生，下表是這些學生訓練前後的成績差異。其中，成績差異=訓練後的成績 - 訓練前的成績。

11.5	15.0	8.5	3.5	-4.5	-2.5	-8.0	7.5	10.0	20.0
-4.0	-1.5	14.0	-3.0	-6.5	18.0	-7.0	13.0	12.0	19.0

假設訓練前後的成績差異不是常態分配。將成績差異絕對值由小而大做排序，給予對應之排名；舉例說明，第 12 位學生成績差異的絕對值最小，所以排名為 1，第 6 位學生的排名為 2，以此類推。令 $W = \sum_{i=1}^{20} (iU_i)$ ，其中

$U_i = 1$ 若排名 i 對應的成績差異是正數，

$= 0$ 若排名 i 對應的成績差異是負數。

(一)若該訓練對學生英聽能力並無影響，試問 U_i 服從什麼分配？(5 分)

(二)若該訓練對學生英聽能力並無影響，試求 W 的期望值與變異數。(10 分)

(三)利用統計量 W 以及(二)中的結果，在顯著水準 0.05 下，檢定是否學生的英聽能力有進步。(5 分)

四、蘭花餐廳王老闆分析該餐廳自 98 年第一季至 102 年第四季(共 20 季)，每季之營業額(萬元)。首先，他算出四季之季節指數如下：

第一季	第二季	第三季	第四季
1.25	1.45	0.70	0.60

其次，王老闆將這些營業額分別除以其對應之季節指數，得到一組去除季節因子之時間數列 y_1, y_2, \dots, y_{20} ；接下來，利用簡單線性模型，他求出去除季節因子之時間數列的長期趨勢估計式 $\hat{y}_t = 21.5 + 0.8t$ 。

(一)各季之營業額與四季平均營業額之比較如何？(5 分)

(二)預測 103 年第一季至第四季的營業額。(10 分)