代號：26520、26620
26720、30320
頁次：4－1

103年公務人員高等考試三級考試試題

類　　科：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程
科　　目：工程數學
考試時間：2 小時　　　　座號：________

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50 分）

㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

一、請用拉普拉斯轉換法解微分積分方程式 $\dfrac{dy}{dt}-6y+9\int_0^t y(\tau)d\tau=4t^3e^{3t}, y(0)=0$。（15 分）

二、令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \lambda_2 & 1+\lambda_2 a_2 & \lambda_2 a_3 & \cdots & \lambda_2 a_n \\ \lambda_3 & \lambda_3 a_2 & 1+\lambda_3 a_3 & \cdots & \lambda_3 a_n \\ & & \vdots & & \\ \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1} a_2 & \lambda_{n-1} a_3 & \cdots & \lambda_{n-1} a_n \\ \lambda_n & \lambda_n a_2 & \lambda_n a_3 & \cdots & 1+\lambda_n a_n \end{bmatrix}$。求解 $\boldsymbol{A}$ 的反矩陣（inverse matrix）。（10 分）

三、試找出一平面 $Ax+By+Cz=D, D\neq 0$ 上距離原點 $(0,0,0)$ 最近一點之座標。（10 分）

四、投擲十顆公平的骰子，其中五顆為藍色骰子而另五顆為綠色骰子，試求下列事件之機率：
㈠剛好二顆藍色骰子皆為 6 點且剛好三顆綠色骰子皆為偶數點數。（7 分）
㈡藍色骰子出現 6 點之數量同於綠色骰子出現 6 點之數量。（8 分）

乙、測驗題部分：（50 分）　　　　代號：2265

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1　定義曲線 C 為 $x=t, y=t$ 及 $z=t^2$，其中 $0\leq t\leq 2$，求函數 $\varphi(x,y)=x+y$ 沿曲線 C 之線積分。

(A) 8　(B) 32/3　(C) $8\sqrt{2}$　(D) $26\sqrt{2}/3$

2　設 f 和 g 為可微分（differentiable）純量函數，$\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{u}$ 為可微分向量函數，則有關它們的梯度（gradient）、散度（divergence）與拉普拉斯算子（Laplace operator）的等式，下列何者錯誤？

(A) $\mathrm{div}(f\mathbf{v})=f\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}+\mathbf{v}\bullet\nabla f$

(B) $\mathrm{div}(f\nabla g)=f\nabla^2 g+\nabla f\bullet\nabla g$

(C) $\nabla^2 f=\mathrm{div}(\nabla f)$

(D) $\nabla^2(fg)=g\nabla^2 f+f\nabla^2 g$

3 令向量函數 $\mathbf{F} = [\, y^2, z, x^2]$，曲線 C 為螺旋圓弧線 $\mathbf{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, t]$從 $(2, 0, 0)$ 到 $(-2, 0, \pi)$，則線積分 $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\,dt$之值為何？

(A) $[\pi, \frac{1}{2}\pi^2, \pi]$
(B) $[\pi, \pi^2, \pi]$
(C) $[2\pi, \frac{1}{2}\pi^2, 2\pi]$
(D) $[2\pi, \pi^2, 2\pi]$

4 令 u, v, w 為空間中向量，則下列敘述何者錯誤？

(A) $u \cdot (u \times w) = 0$
(B) $u \cdot (v \times w) = (w \times u) \cdot v$
(C) $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$
(D) $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

5 設 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，則其反矩陣 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特徵值之積為何？

(A)-3
(B)3
(C) $-\frac{1}{3}$
(D) $\frac{1}{3}$

6 一個矩陣 $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$，則以下何者不是其特徵向量（eigenvector）？

(A)x = (2, −4, 6)
(B)x = (2, 0, 6)
(C)x = (2, 2, 0)
(D)x = (−1, 0, 1)

7 有關正交矩陣（orthogonal matrices）**A** 的特性，下列何者錯誤？

(A)**A** 的行向量（column vector）都互為正交
(B)**A** 的列向量（row vector）都互為正交
(C)**A** 的行列式值（determinant）為 1 或−1
(D)**A** 的特徵值（eigenvalues）全為實數

8 下列選項何者為 $e^z = 1+2i$ 的一解，其中 $i = \sqrt{-1}$ ：

(A) $\frac{1}{2}\ln(2) + i\tan^{-1}(5)$
(B) $\frac{1}{2}\ln(5) + i\tan^{-1}(2)$
(C) $\ln(2) + i\,(1/2)\,\pi$
(D) $\ln(5) + i\,(1/2)\,\pi$

9　令 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 為矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1-i \\ 1 & 0 & -i \\ 1+i & i & 2 \end{pmatrix}$ 的特徵值（eigenvalues），其中 $i=\sqrt{-1}$，試問下列何者正確？

(A) $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1+i$

(B) $\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3 = 1-i$

(C) $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$

(D) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$

10　針對複數冪級數（complex power series）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3}(z-2i)^n$ 的敘述，下列何者正確？

(A)此冪級數僅在 $z=2i$ 收斂

(B)此冪級數在 $|z-2i|<1/27$ 的開放圓（open disk）內為收斂

(C)此冪級數在 $|z-2i|<27$ 的開放圓內為收斂

(D)此冪級數在所有複數 z 均收斂

11　假設 C 為沿著逆時針方向繞圓周 $|z|=2$，試求積分 $\int_C ze^{\frac{1}{z}}dz$ 為何？

(A) 0　(B) πi　(C) 1　(D) $2\pi i$

12　下列何項常微分方程式之 $x=0$ 為不規則奇點（irregular singular point）？

(A) $x^2y''+xy'+(x^2-4)y=0$　(B) $x^2y''+\sin x\cdot y=0$

(C) $x^5y''+4x^4y'+2y=0$　(D) $4xy''+2y'-y=0$

13　設微分方程式 $y'+ay=4e^{-2x}, y(0)=y_0$ 的解 $y(x)$ 的拉式轉換為 $Y(s)=\dfrac{-s+2}{s^2+6s+8}$，試求常數 a 及 y_0，並判定下列何者正確？

(A) $a+y_0=4$　(B) $a+y_0=3$

(C) $a+y_0=2$　(D) $a+y_0=1$

14 已知$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t+\phi)\right]=\dfrac{\omega\cos\phi+s\sin\phi}{s^2+\omega^2}$，以下何者為$\mathcal{L}\left[\cos(\omega t+\phi)\right]$？

(A) $\dfrac{\omega\sin\phi+s\cos\phi}{s^2+\omega^2}$
(B) $\dfrac{s\sin\phi+\omega\cos\phi}{s^2+\omega^2}$
(C) $\dfrac{\omega\cos\phi-s\sin\phi}{s^2+\omega^2}$
(D) $\dfrac{s\cos\phi-\omega\sin\phi}{s^2+\omega^2}$

15 試找出微分方程式$y''+\lambda y=0,\ y(0)=0,\ y(L)=0$之特徵值（eigenvalues）$\lambda_m\ (m=1,2,3,...)$？

(A) $\lambda_m=(\dfrac{mL}{2\pi})^2$
(B) $\lambda_m=(\dfrac{m\pi}{L})^2$
(C) $\lambda_m=(\dfrac{2m\pi}{L})^2$
(D) $\lambda_m=(\dfrac{mL}{\pi})^2$

16 下列何者不可能是微分方程式$y''+Ay'+By=0$的解？其中A和B為常數。

(A) x^2
(B) e^{3x+4}
(C) e^2+x
(D) $e^{2x}\cos(3x+4)$

17 有一個週期為L的函數$f(x)=x^2,\ 0<x<L$，展開成$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{2n\pi x}{L}+b_n\sin\dfrac{2n\pi x}{L}\right)$，請問$b_n$為何？

(A) $\dfrac{L}{n\pi}$
(B) $\dfrac{L^2}{n\pi}$
(C) $\dfrac{-L^2}{n\pi}$
(D) $\dfrac{-L}{n\pi}$

18 離散隨機變數X與Y之結合機率質量函數（joint probability mass function）為：

$$p_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c(x^2+y), & \text{if } (x,y)=(1,1),(1,2),(2,1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

，試問下列何者正確？

(A) $Var(Y)=\dfrac{1}{10}$
(B) $Var(Y)=\dfrac{1}{4}$
(C) $Var(Y)=\dfrac{21}{100}$
(D) $Var(Y)=\dfrac{23}{100}$

19 二枚錢幣出現正面之機率分別為$\dfrac{1}{3}$及$\dfrac{1}{2}$，同時投擲該二枚錢幣連續3次，試求二枚錢幣皆出現正面剛好2次之機率為何？

(A) $\dfrac{1}{72}$
(B) $\dfrac{5}{72}$
(C) $\dfrac{3}{32}$
(D) $\dfrac{5}{36}$

20 假設50歲以上的成年人罹患癌症的機率為0.05，而醫生將患有癌症病患成功篩檢出來的機率為0.78，但是將沒有患病的成年人錯誤篩檢為有癌症的機率為0.06。請問針對此癌症篩檢來說，一位50歲以上的成年人會被檢測出他有癌症的機率為何？

(A)0.039
(B)0.096
(C)0.057
(D)0.05

測驗式試題標準答案

考試名稱：103年公務人員高等考試三級考試暨普通考試

類科名稱：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程

科目名稱：工程數學（試題代號：2265）

單選題數：20題　　單選每題配分：2.50分

複選題數：　　複選每題配分：

標準答案：

題號	第1題	第2題	第3題	第4題	第5題	第6題	第7題	第8題	第9題	第10題
答案	D	D	C	C	D	B	D	B	D	B
題號	第11題	第12題	第13題	第14題	第15題	第16題	第17題	第18題	第19題	第20題
答案	B	C	B	D	B	A	C	C	B	B
題號	第21題	第22題	第23題	第24題	第25題	第26題	第27題	第28題	第29題	第30題
答案										
題號	第31題	第32題	第33題	第34題	第35題	第36題	第37題	第38題	第39題	第40題
答案										
題號	第41題	第42題	第43題	第44題	第45題	第46題	第47題	第48題	第49題	第50題
答案										
題號	第51題	第52題	第53題	第54題	第55題	第56題	第57題	第58題	第59題	第60題
答案										
題號	第61題	第62題	第63題	第64題	第65題	第66題	第67題	第68題	第69題	第70題
答案										
題號	第71題	第72題	第73題	第74題	第75題	第76題	第77題	第78題	第79題	第80題
答案										
題號	第81題	第82題	第83題	第84題	第85題	第86題	第87題	第88題	第89題	第90題
答案										
題號	第91題	第92題	第93題	第94題	第95題	第96題	第97題	第98題	第99題	第100題
答案										

備　　註：