

類 科：統計

科 目：統計學

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器，須詳列解答過程。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

本試題可能使用之參考值如下：

 $Z_{0.10} = 1.28$, $Z_{0.05} = 1.645$, $Z_{0.025} = 1.96$, $F_{0.05}(1,40) = 4.08$, $F_{0.05}(4,40) = 2.61$, $F_{0.05}(5,40) = 2.45$,
 $F_{0.05}(6,40) = 2.34$, $F_{0.10}(1,40) = 2.84$, $F_{0.10}(4,40) = 2.09$, $F_{0.10}(5,40) = 2.00$, $F_{0.10}(6,40) = 1.93$ 。
一、設 x_1, x_2, \dots, x_n 為一組抽自平均數為 μ ，標準差為 σ 的常態分配之隨機樣本，又
 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 為樣本平均數，令隨機變數 $Y_i = X_i - \bar{X}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ，則：
(一)試求 Y_1 的變異數 $V(Y_1) = ?$ (8分)(二)試求 Y_1 ， Y_2 的共變異數 (Covariance) $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = ?$ (8分)(三)若使 $K \cdot (Y_1 + Y_2)^2$ 為 σ^2 之不偏估計量，則常數 $K = ?$ (8分)二、已知隨機變數 X 的機率密度函數為 $f(x) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$ ，其中未知參數 $\theta > -1$ 。又令 x_1, x_2, \dots, x_n 為抽自 X 之一組大小為 n 的隨機樣本，則：(一)試以動差法 (method of moments) 求 θ 之點估計量。(12分)(二)試以最大概似法 (method of maximum likelihood) 求 θ 之點估計量。(12分)三、設 x_1, x_2, \dots, x_n 為一組抽自平均數為 μ ，變異數為 $\sigma^2 = 100$ 的常態母體之隨機樣本， μ 為未知參數。(一)試求 (導出) 檢定問題 $H_0: \mu = 80$ vs. $H_1: \mu = 86$ 的最強力檢定 (most powerful test) 之最佳拒絕域 R 為何? (8分)(二)對於 (一) 之檢定問題，試求滿足 $P((x_1, x_2, \dots, x_n) \in R | H_0) = P(\bar{X} \geq k | H_0) = 0.05$ 及 $P((x_1, x_2, \dots, x_n) \in R | H_1) = P(\bar{X} \geq k | H_1) = 0.95$ 要求下之樣本大小 $n = ?$ 及最佳拒絕域 R 之臨界值 $k = ?$ (10分)(三)若檢定問題為 $H_0: \mu = 80$ vs. $H_1: \mu > 80$ ，且樣本大小為 $n = 25$ ，試求在 $\alpha = 0.05$ 下，此檢定問題之齊一最強力檢定 (uniformly most powerful test) 之最佳拒絕域 R 為何? (8分)

(請接背面)

類 科：統計
科 目：統計學

四、設因變數 Y 與自變數 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 做複迴歸，模式為：

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \beta_5 X_5 \cdots (1)$$

蒐集樣本資料後，經資料分析，得到下列部分變異數分析 (ANOVA) 表：

變異來源	平方和 SS	自由度 DF	均方和 MS	F
迴歸	①	②	④	⑥
殘差	200	③	⑤	
總變異	250	45		

(一)請完成上面的變異數分析表，即在試卷上填答①~⑥之值。(6分)

(二)試求複判定係數 (coefficient of multiple determination) $R^2 = ?$ (6分)

(三)試問在 $\alpha = 0.05$ 下，檢定 $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$ 是否顯著？(7分)

(四)若 Y 對自變數 X_2, X_3, X_4, X_5 做複迴歸，得殘差平方和為 $SSE = 210$ ，試問對模式(1)中檢定 $H_0 : \beta_1 = 0$ 是否顯著？(取 $\alpha = 0.05$) (7分)