

107年公務人員特種考試司法人員、法務部
調查局調查人員、國家安全局國家安全情報
人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

考試別：國家安全情報人員

等別：三等考試

類科組：數理組

科目：線性代數

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

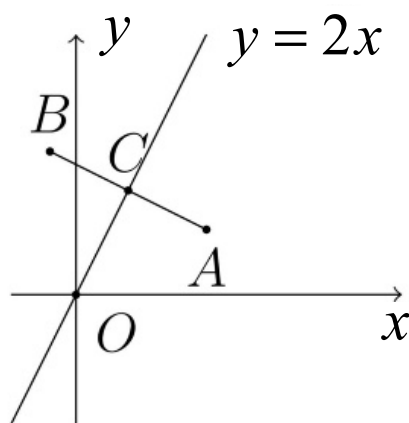
一、 $\mathbf{A}$ 是一個 $m \times n$ 的矩陣，其秩 (rank) 為 r ，且存在一個 $m \times 1$ 的向量 $\mathbf{b}$ 使得 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 是無解，那麼 m 、 n 及 r 三個量的大小 (含等號) 關係為何？
(10 分)

二、假設矩陣 $\mathbf{A}$ 不等於單位矩陣 $\mathbf{I}$ ，且是 2×2 的實係數矩陣，且 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$ 。

(一)若 λ 為 $\mathbf{A}$ 矩陣的一個固有值 (eigenvalue)，試證 $\lambda^3 = 1$ 。(10 分)

(二)試求 $\mathbf{A}$ 矩陣的跡 (trace) 與行列式 (determinant)。(10 分)

三、考慮平面直線 $y = 2x$ 的反射線性函數 T ，如圖所示，若 $A = (a, b)$ 且 $T(a, b) = B$ ，則 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 且 $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ ，試求此線性函數 T 相對於標準基底 $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ 的矩陣表示 $[T]_\beta$ 。(20 分)



四、假設 $T: V \rightarrow V$ 為線性函數，且 V 為有限維度的向量空間，且 T 和 T^2 的秩 (rank) 相等。試證： $R(T) \cap N(T) = \{0\}$ ，其中 0 屬向量空間 V 的零元素， $R(T)$ 為 T 的值域， $N(T)$ 為 T 的零空間。(25 分)

五、(一) 假設 $\mathbf{A}$ 是如下的 3×3 矩陣：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

試求： $\mathbf{A}$ 的所有固有值 (eigenvalues) 和其相對應的固有向量 (eigenvectors)。(10 分)

(二) 利用子題(一)之特性，考慮如下的方程式：

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xz - 1 = 0$$

試求： $x^2 + y^2 + z^2$ 的最大值且 x, y, z 滿足上述方程式。(15 分)