

代號：36020  
36120  
36220  
頁次：4-1

# 107年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：電力工程、電子工程、電信工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
- (二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
- (三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、若  $\mathbf{A}$  與  $\mathbf{B}$  互為相似 (similar) 之  $n \times n$  矩陣， $\text{trace}(\mathbf{A})$  為矩陣  $\mathbf{A}$  之跡數 (trace) 且  $\lambda$  為任意常數，令  $\mathbf{I}$  為  $n \times n$  單位矩陣，試證明：

(一)  $\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}$  與  $\lambda\mathbf{I}+\mathbf{B}$  相似。(5 分)

(二)  $\text{trace}(\mathbf{A}) = \text{trace}(\mathbf{B})$ 。(5 分)

(三)  $\det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}) = \det(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{B})$ 。(5 分)

二、利用級數  $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$  解微分方程式  $(x+1)y' = y$ ，其中  $y' = \frac{dy}{dx}$ 。(10 分)

三、請求出週期函數  $f(x) = \frac{x^2}{2}$ ，其中  $-\pi < x < \pi$  之傅立葉級數，再利用此級數證明

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (15 \text{ 分})$$

四、試求積分  $\int_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)} dz$ ，其中  $C$  為逆時針方向的圓積分路徑  $|z|=4$ 。(10 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：2360

- (一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
- (二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 假設  $\mathbf{A}$ ， $\mathbf{B}$  為同階方陣，則 ①  $\text{trace}(\mathbf{AB}) = \text{trace}(\mathbf{BA})$  ②  $\text{trace}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{trace}(\mathbf{A}) + \text{trace}(\mathbf{B})$

③  $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}|$  ④  $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$ ，下列敘述何者正確？

- (A) ①②③④ 皆成立      (B) 僅 ①②③ 成立      (C) 僅 ②③ 成立      (D) 僅 ①③ 成立

2 令  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  為同維度之三向量，則下列有關其外積（cross product）的敘述何者正確？

(A)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$

(B)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

(C) 若  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  且  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ ，則  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$

(D) 若  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  且  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ，仍有可能  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$

3 令矩陣  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，若  $\mathbf{A}$  的秩（rank）為 2，則  $a$  值為何？

(A) -2

(B) -1

(C) 0

(D) 1

4 已知  $n$  為任意正整數， $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  及  $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  皆為已知常數矩陣， $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  為未知矩陣。若線性方程式系統  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  存在唯一解，下列何者正確？

(A)  $\text{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$

(B)  $\text{rank}(\mathbf{A}) = 0$

(C)  $\det(\mathbf{A}) = 0$

(D)  $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 0$

5 求出線性轉換  $\mathbf{L}: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ ， $\mathbf{L}(x, y, z) = (x - 2y, 2x + y)$  的代表矩陣為：

(A)  $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(B)  $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(C)  $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(D)  $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6 矩陣  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$  的秩之值為何？

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

7 將  $e^{5+2i}$  化簡為  $a+bi$  形式的敘述（ $a, b$  為常數），則化簡後結果為：

(A)  $e^{5t}(\cos(2t) + i \sin(2t))$

(B)  $e^{5t}(\cos(2t) - i \sin(2t))$

(C)  $e^5(\cos(2) + i \sin(2))$

(D)  $e^5(\cos(2) - i \sin(2))$

8 假設路徑  $C$  為一逆時針方向的單位圓  $|z| = 1$ ，求  $\int_C \frac{\sinh z}{z^2} dz$  之值為何？

(A)  $2\pi i$

(B)  $\pi i$

(C)  $\frac{\pi i}{2}$

(D)  $-\pi i$

9 函數  $f(t)$  之拉氏轉換 (Laplace transform) 表示為  $L\{f(t)\}$ ，若  $L\{f(t)\} = \frac{e^{-2s}}{s^2 - 3s + 2}$ ，則  $f(t)$  為何？

其中  $u(t)$  為單位步階 (unit step)。

- (A)  $(e^{t-2} - e^{2t-4})u(t-2)$                       (B)  $(-e^{t-2} + e^{2t-4})u(t-2)$   
 (C)  $((t-2)e^{t-2} + e^{2t-4})u(t-2)$                       (D)  $(-(t-2)e^{t-2} + e^{2t-4})u(t-2)$

10 假設方程式  $y(t) - \int_0^t y(\tau)(t-\tau)d\tau = 2 - \frac{1}{2}t^2$  的解是  $y(t) = a + be^t + ce^{-t}$ ，其中  $a, b, c$  是常數，求

$a+b+c = ?$

- (A)-1                      (B)1                      (C)2                      (D)3

11 下列何者可做為微分方程式  $2 + (6x - e^{-2y})\frac{dy}{dx} = 0$  的積分因子 (integration factor)？

- (A)  $e^{2x}y^3$                       (B)  $x^3e^{2y}$                       (C)  $e^{3y}$                       (D)  $e^{3x}$

12 給定一個二維 (2-dimension) 微分方程式  $x'(t) = -2y(t), y'(t) = \frac{1}{2}x(t)$ ，且滿足  $x(0) = 2, y(0) = 0$ ，

則下列選項何者正確？

- (A)  $x(t) = 2\cos t$                       (B)  $x(t) = 2\cos 2t$                       (C)  $y(t) = \sin 2t$                       (D)  $y(t) = 2\sin 2t$

13 下列何者是  $(x-1)^2 y'' - 4xy' + 4y' + 4y = 0$  的解？(選項中  $c_1$  和  $c_2$  為任意常數。)

- (A)  $c_1 x^4 + c_2 x$                       (B)  $c_1 (x-1)^4 + c_2 (x-1)$   
 (C)  $c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln(x)$                       (D)  $c_1 (x-1)^2 + c_2 (x-1)^2 \ln(x-1)$

- 14 複變函數  $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$  在  $x+iy$  為可微分，則下列何條件必須滿足？
- (A)  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  和  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$       (B)  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  和  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$
- (C)  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$  和  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$       (D)  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$  和  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$
- 15 求符合偏微分方程式  $u_{xy} - 4u_x = 0$  的通解。
- (A)  $c_1(x)e^{-4y} + c_2(y)$ ，其中  $c_1, c_2$  為函數      (B)  $c_1(y)e^{4y} + c_2(x)$ ，其中  $c_1, c_2$  為函數
- (C)  $c_1(x)e^{4y} + c_2(y)$ ，其中  $c_1, c_2$  為函數      (D)  $c_1(y)e^{-4y} + c_2(x)$ ，其中  $c_1, c_2$  為函數
- 16 求函數  $F(s) = \frac{5s+1}{s^2-25}$  的逆拉式轉換 (inverse Laplace transform) ？
- (A)  $5 \sinh 5t + \frac{1}{5} \cosh 5t$       (B)  $5 \cosh 5t + \frac{1}{5} \sinh 5t$       (C)  $5 \cos 5t + \frac{1}{5} \sin 5t$       (D)  $5 \sin 5t + \frac{1}{5} \cos 5t$
- 17 已知  $F(s) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$  為  $f(t)$  的傅立葉轉換 (Fourier transform)， $f^*(t)$  為  $f(t)$  的共軛複數 (complex conjugate)，其中  $s = j\omega$ ，下列何者錯誤？
- (A)  $f^*(t)$  的傅立葉轉換為  $F^*(-s)$       (B)  $f^*(-t)$  的傅立葉轉換為  $F^*(-s)$
- (C)  $f(-t)$  的傅立葉轉換為  $F(-s)$       (D)  $f(3t)$  的傅立葉轉換為  $\frac{1}{3}F\left(\frac{s}{3}\right)$
- 18 投擲兩顆公正骰子，獲得兩個相同數字 (equal numbers) 或是數字具偶數乘積 (numbers with even product) 的機率為何？
- (A) 15/36      (B) 27/36      (C) 5/6      (D) 8/9
- 19 假設  $X$  和  $Y$  為兩個獨立的隨機變數，其聯合機率分布 (joint probability distribution)  $f(x,y)$  為  $f(2,1) = 0.1$ ， $f(2,3) = 0.2$ ， $f(2,5) = 0.1$ ， $f(4,1) = 0.15$ ， $f(4,3) = 0.3$ ， $f(4,5) = 0.15$ ；試問一個隨機變數  $Z = XY$ ，則此隨機變數  $Z$  的期望值為何？
- (A) 3.6      (B) 6      (C) 9.6      (D) 12
- 20 若  $X$  的機率質量函數為  $p(0) = 1/3$ ， $p(1) = 2/3$ ，則其期望值  $E[X]$  為多少？
- (A) 1/3      (B) 1/2      (C) 2/3      (D) 1

# 測驗式試題標準答案

考試名稱：107年公務人員高等考試三級考試暨普通考試

類科名稱：電力工程、電子工程、電信工程

科目名稱：工程數學（試題代號：2360）

單選題數：20題

單選每題配分：2.50分

複選題數：

複選每題配分：

標準答案：

題號	第1題	第2題	第3題	第4題	第5題	第6題	第7題	第8題	第9題	第10題
答案	B	D	A	D	D	B	C	A	B	C

題號	第11題	第12題	第13題	第14題	第15題	第16題	第17題	第18題	第19題	第20題
答案	C	A	B	B	C	B	B	C	C	C

題號	第21題	第22題	第23題	第24題	第25題	第26題	第27題	第28題	第29題	第30題
答案										

題號	第31題	第32題	第33題	第34題	第35題	第36題	第37題	第38題	第39題	第40題
答案										

題號	第41題	第42題	第43題	第44題	第45題	第46題	第47題	第48題	第49題	第50題
答案										

題號	第51題	第52題	第53題	第54題	第55題	第56題	第57題	第58題	第59題	第60題
答案										

題號	第61題	第62題	第63題	第64題	第65題	第66題	第67題	第68題	第69題	第70題
答案										

題號	第71題	第72題	第73題	第74題	第75題	第76題	第77題	第78題	第79題	第80題
答案										

題號	第81題	第82題	第83題	第84題	第85題	第86題	第87題	第88題	第89題	第90題
答案										

題號	第91題	第92題	第93題	第94題	第95題	第96題	第97題	第98題	第99題	第100題
答案										

備註：