

類 科：天文、氣象

科 目：應用數學（包括微積分、微分方程與向量分析）

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、(一)求函數 $f(x, y) = x^3 - 3y^2 + 6xy - x - 9y + 10$ 在點 $(1, -1)$ 之最大方向導數 (directional derivative)。(10分)

(二)求函數 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 12$ 在 $x^2 + y^2 \leq 4$ 之範圍內之最大值及最小值。(15分)

二、令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

(一)求 P 使得 $P^{-1}AP = D$ ，其中 D 為一-diagonal matrix。(15分)

(二)求初始值問題 $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ ， $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 之解。(20分)

三、令 $f(x) = x^2$ ， $x \in [-\pi, \pi]$ ，

(一)求函數 f 之傅立葉級數 (Fourier series)。(15分)

(二)求初始值問題 $u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$ ， $x \in (-\pi, \pi)$ ， $t > 0$ ， $u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0$ ， $u(x, 0) = x^2$ 之解。(25分)