

類 科：天文

科 目：微積分

考試時間：1小時30分

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、試分別求下列的極限值：(每小題15分，共30分)

$$(一) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n^2} \sin \frac{k\pi}{2n} \right)。$$

$$(二) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^{2.01}} \int_0^{x^2} \ln(t^2 + 1) dt \right)。$$

二、已知函數 $f(x)$ 滿足 $\int_0^{x^2+1} f(t) dt = \frac{x+1}{e^x}$ ，試求 $f(x)$ 的函數圖形在點 $(2, f(2))$ 之切線方程式。(20分)

三、若定義 $F(r) = \frac{e^r}{r}$ ， $r = G(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ， $H(x, y, z) = F(G(x, y, z))$ ，試計算 $\Delta H := \frac{\partial^2}{\partial x^2} H + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H + \frac{\partial^2}{\partial z^2} H$ 。(25分)

四、令 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq 3x + 4y \leq 2, 0 \leq 3x - 4y \leq 2\}$ ，試計算下列重積分的值： $\iint_D (9x^2 + 16y^2) dx dy$ 。(25分)