

類 科：統計
科 目：統計學概要
考試時間：1 小時 30 分

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、目前核融合技術的重大突破，讓未來核融合發電可望成真。已知國內某大學的實驗室有三座核融合反應爐，令變數 T_i 為第 i 座反應爐的核融合實際反應時間與目標反應時間之間的差異， $i=1,2,3$ 。假設變數 T_1, T_2, T_3 彼此相互獨立，且都服從平均數為 0，變異數為 4 之常態分配。

(一) 求出機率 $P[T_1^2 + T_2^2 \leq 2]$ 。(10 分)

(二) 令變數 $S = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}$ ，請求出變數 S 之機率密度函數 $f(s)$ 。(10 分)

(三) 令變數 $W = \frac{T_1^2}{T_1^2 + T_2^2}$ ，請求出變數 W 之機率密度函數 $f(w)$ 。(10 分)

(四) 求出題(三)之變數 W 的期望值 $E(W)$ 。(10 分)

(五) 求出機率 $P[\text{Min}\{\text{Max}\{T_1, T_2\}, T_3\} < 0]$ ，此處 $\text{Max}\{a, b\}$ 代表取 a, b 之最大值， $\text{Min}\{a, b\}$ 代表取 a, b 之最小值。(10 分)

(六) 假設每一座反應爐每次點火成功的機率為 0.2，且假設三座反應爐點火成功與否彼此相互獨立。令 X_i 為第 i 座反應爐直到第一次點火成功前，所需的點火（失敗）次數， $i=1,2,3$ 。請求出機率 $P[X_1 \geq X_2]$ 。(10 分)

二、ChatGPT 的問世帶動了 AI 商機的蓬勃發展，也促成了市場對 GPU 需求量的急遽增加。已知國內某生產 GPU 的工廠，所生產的 GPU 之壽命服從變異數為 θ 之指數分配。今由此公司之生產線隨機抽檢 n 筆 GPU 樣本並測驗其壽命，令 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 表此 n 筆相互獨立樣本之觀測值。令 $\text{Min}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ 代表取 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 之最小值， $\text{Max}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ 代表取 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 之最大值。

(一) 求出此 GPU 壽命分配之中位數的均勻最小變異不偏估計量 (uniformly minimum variance unbiased estimator)。(10 分)

(二) 求出機率 $P[\text{Min}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} < 1]$ 之最大概似估計量 (maximum likelihood estimator)。(10 分)

(三) 求出機率 $P[\text{Min}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} > 1, \text{Max}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\} > 2]$ 。(10 分)

(四) 令 $F(y)$ 為變數 Y_i 之累積分配函數 (cumulative distribution function)。請求出機率 $P[\text{Min}\{F(Y_1), F(Y_2), \dots, F(Y_n)\} > \frac{1}{4}, \text{Max}\{F(Y_1), F(Y_2), \dots, F(Y_n)\} < \frac{1}{2}]$ 。(10 分)