

考試別：調查人員
等 別：三等考試
類 科 組：電子科學組
科 目：工程數學
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、令矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ 。

(一)求 A 的所有特徵值 (eigenvalues)。(6分)

(二)求矩陣 P 與 D ，使得 $D = P^{-1}AP$ 為一對角矩陣 (diagonal matrix)。(8分)

(三)求 $A^4 + 3A^3 - A^2 - 5A + 2I$ ，其中 I 為 3×3 單位矩陣。(6分)

二、設 $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ，求 e^{At} 。(15分)

三、若將複變數函數 $f(z) = \frac{2z^2+9z+5}{(z+2)^2(z-3)}$ 展開如下列之泰勒級數 (Taylor series)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n, \text{ 其中 } z \text{ 為複變數 (complex variable)。$$

(一)求 a_0, a_1, a_2 之值為何？(15分)

(二)求此泰勒級數 (Taylor series) 之收斂半徑 (radius of convergence) R 。(5分)

四、利用拉普拉斯轉換 (Laplace transform) 求解

$$y(t) + 2 \int_0^t y(t-\tau) \cos 2\tau d\tau = e^{-t}, t \geq 0 \text{。 (25分)}$$

五、設隨機變數 X 與 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0 < x < 10 \text{ 且 } 0 < y < \infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}。$$

(一)求 b 值。(8分)

(二)求 X 的邊際機率密度函數 (marginal probability density function): $f_X(x)$ 。
(6分)

(三)求 Y 的邊際機率密度函數 (marginal probability density function): $f_Y(y)$ 。
(6分)