

類 科：統計  
科 目：統計學  
考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、人工智慧的興起，帶動了市場對晶片需求量的飆升，也連帶促成相關產業的蓬勃發展。已知國內有某家公司專門生產晶片半導體製程中使用的圓形光罩。今由此公司之生產線隨機抽檢  $n$  筆光罩樣本並測量其半徑。若已知因某些特定原因造成該公司測量儀器不精準，測量之觀測值會有誤差，令  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  表其觀測誤差。假設觀測誤差  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  彼此相互獨立且服從平均數為 1，變異數為  $\sigma^2$  之常態分配，並令  $\theta$  為此圓形光罩的真實半徑。令變數  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  為此  $n$  筆樣本之半徑的觀測值，則  $Y_i = \theta + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。令  $F(y)$  為變數  $Y_i$  之累積分配函數 (cumulative distribution function)。(每小題 10 分，共 80 分)

(一) 求出機率  $P\left(\left|\frac{F(Y_1)}{F(Y_2)} - 1\right| \leq 0.5\right)$ 。

(二) 求出條件機率  $P(F(Y_2) > F(Y_1) | F(Y_2) \geq 0.5)$ 。

(三) 假設  $\theta$  和  $\sigma^2$  皆未知，請利用觀測值  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  求出此光罩半徑  $\theta$  之最大概似估計量 (maximum likelihood estimator)。

(四) 假設  $\theta$  和  $\sigma^2$  皆未知，請利用觀測值  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  求出此光罩面積  $\pi\theta^2$  之均勻最小變異不偏估計量 (uniformly minimum variance unbiased estimator)。

(五) 假設  $\theta$  和  $\sigma^2$  皆未知，請求出光罩半徑  $\theta$  之信賴水準  $100(1-\alpha)\%$  的信賴區間。

(六) 若該公司有兩條獨立作業的生產線，且已知此兩條生產線所生產之光罩的瑕疵率皆為  $\lambda$ 。令變數  $S_i$  為第  $i$  條生產線上檢測產品直到檢測出第一個瑕疵品前所需的檢測 (良品) 次數， $i = 1, 2$ ，請求出機率  $P[S_1 = S_2]$ 。

(七) 續題(六)，令變數  $U = \text{Min}\{S_1, S_2\}$  代表取  $S_1, S_2$  之最小值，請求出  $U$  之機率密度函數  $f(u)$ 。

(八) 求出題(七)之變數  $U$  的期望值  $E(U)$ 。

二、臺灣量子國家隊已成軍 5 年，去年突破技術瓶頸，成功自製出 5 量子位元之超導量子電腦，象徵著臺灣的量子時代來臨。已知團隊開發的量子電腦有一個核心的元件，此核心元件是由三個電路組件串聯及並聯構成。令變數  $T_1, T_2, T_3$  分別代表此三個電路組件的壽命，此核心元件是先由第一及第二個電路組件串聯後，再和第三個電路組件並聯而成，因此整個核心元件的壽命是  $X = \text{Max}\{\text{Min}\{T_1, T_2\}, T_3\}$ ，此處  $\text{Max}\{a, b\}$  代表取  $a, b$  之最大值， $\text{Min}\{a, b\}$  代表取  $a, b$  之最小值。假設此三個電路組件的壽命彼此相互獨立，皆服從具有平均數為 2 之指數分配。(每小題 10 分，共 20 分)

(一) 求出變數  $X$  之機率密度函數  $f(x)$ 。

(二) 求出變數  $X$  之變異數  $\text{Var}(X)$ 。