

114年公務人員特種考試關務人員、身心障礙人員考試及
114年國軍上校以上軍官轉任公務人員考試試題

考試別：關務人員考試

等別：三等考試

類科：關稅統計（選試英文）

科目：統計學

考試時間：2小時

座號：_____

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、假設隨機變數 X 與 Y 有下面的聯合 (jointly) 機率密度函數 (probability density function)：

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y < \infty \\ 0, & \text{其他範圍} \end{cases}$$

請回答下列問題：（每小題 4 分，共 28 分）

(一)求隨機變數 X 與 Y 的聯合動差母函數 (moment generating function)。

(二)求隨機變數 X 的期望值。

(三)求隨機變數 Y 的期望值。

(四)求隨機變數 X 的變異數。

(五)求隨機變數 Y 的變異數。

(六)求兩隨機變數 X 與 Y 的共變異數 (covariance)。

(七)求兩隨機變數 X 與 Y 的相關係數 (correlation coefficient)。

二、令 X_1, X_2, \dots, X_n 是一組樣本大小 (sample size) 為 n ，從均勻分配 (uniform distribution) $U[0, \theta]$ 抽樣而來的隨機樣本 (random sample)，其中的參數 θ 未知。隨機變數 X_i 的機率密度函數具有如下的形式：

$$f(x_i; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x_i \leq \theta \quad i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{其他範圍} \end{cases}$$

請回答下列問題：

(一)令 $\hat{\theta}$ 為參數 θ 的最大概似估計量 (maximum likelihood estimator)。

(每小題 3 分，共 12 分)

1. 試求出 $\hat{\theta}$ 。

2. $\hat{\theta}$ 是否具有不偏性 (unbiased)？請證明之。

3. $\hat{\theta}$ 的均方誤差 (mean square error, 簡稱 MSE) 是多少？請證明之。

4. $\hat{\theta}$ 是否是參數 θ 的一致性估計量 (consistent estimator of θ) ? 請證明之。

(二) 令 $\tilde{\theta}$ 為利用動差法 (method of moments) 來對參數 θ 做估計所獲得的統計量。(每小題 3 分, 共 12 分)

1. 試求出 $\tilde{\theta}$ 。

2. $\tilde{\theta}$ 是否具有不偏性? 請證明之。

3. $\tilde{\theta}$ 的均方誤差是多少? 請證明之。

4. $\tilde{\theta}$ 是否是參數 θ 的一致性估計量? 請證明之。

(三) 試比較 $\hat{\theta}$ 與 $\tilde{\theta}$ 的 MSE, 看怎樣的樣本大小會讓 $\hat{\theta}$ 或 $\tilde{\theta}$ 那一個比較具優勢? (3 分)

三、某一出租影印機業者, 欲研究維護影印機的時間 Y (分鐘) 與所出租的影印機數量 X (台) 之間的關係, 經業者抽樣調查蒐集了 10 組維護影印機的時間與出租影印機數量的資料, 如下表所示:

x_i	20	23	27	24	19	22	18	19	21	25
y_i	520	547	594	551	509	513	495	511	527	534

若業者想利用這些資料建一個迴歸模型 $Y = \beta_0 + \beta_1 X$ 作為未來估計與預測之用, 請回答下列問題: (每小題 6 分, 共 30 分)

(一) 請以最小平方法 (least square method) 求參數 β_0 與 β_1 之估計值。

(二) 求參數 β_0 與 β_1 之 95% 信賴區間。

(三) 針對(二)所算出來的 β_1 之 95% 信賴區間, 請解釋其意涵。

(四) 若欲檢定由所蒐集的資料中是否足以顯示影印機維護時間受到出租影印機數量的影響, 可以怎麼做? 結論為何? (顯著水準設為 $\alpha = 0.05$)

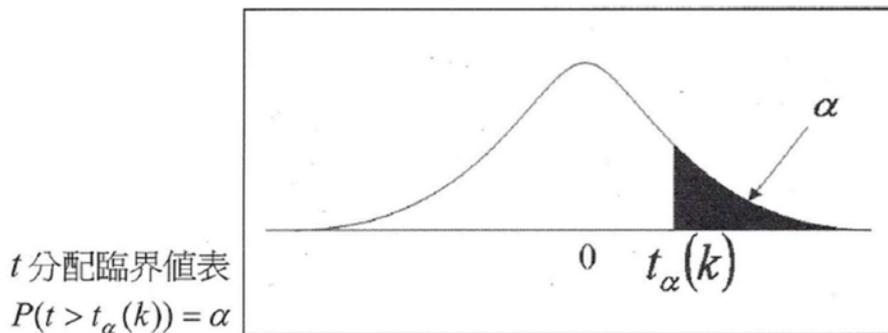
(五) 針對某一個月份影印機出租數量為 26 台時, 求其維護影印機時間的預測值之 95% 的信賴區間。

四、隨機選取 A、B 兩廠牌的輪胎各 10 個，以成對的方式置入 10 部車子的後輪中，以測試這兩種輪胎的耐磨程度，並記錄其耐磨的里程數（里程數越多代表輪胎越耐磨）。數據資料（單位：千公里）如下表所示：

輪胎 \ 車子	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 廠牌	23	20	26	25	48	26	25	24	15	20
B 廠牌	20	30	16	33	23	24	8	21	13	18

請回答下列的問題（顯著水準皆設為 $\alpha = 0.01$ ）：（每小題 5 分，共 15 分）

- (一) 若已知母體為常態分配，根據上表的資料，請問 A 廠牌的輪胎平均耐磨度是否較 B 廠牌好？
- (二) 若已知母體分配未知，請以符號檢定法（The Sign Test）再檢定(一)之結果。
- (三) 若已知母體分配未知，請以 Wilcoxon 符號等級檢定法（The Wilcoxon Signed-Rank Test）再檢定(一)之結果。



$k(d.f.)$	$t_{0.100}(k)$	$t_{0.050}(k)$	$t_{0.025}(k)$	$t_{0.010}(k)$	$t_{0.005}(k)$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169

二項分配累積分配函數表

$$P(X \leq a) = \sum_{x=0}^a C_k^n p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{x=0}^a \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

n = 10														
p														
a	0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	0.95	0.99	a
0	.904	.599	.349	.107	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	0
1	.996	.914	.736	.376	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000	1
2	1.000	.988	.930	.678	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000	2
3	1.000	.999	.987	.879	.650	.382	.172	.055	.011	.001	.000	.000	.000	3
4	1.000	1.000	.998	.967	.850	.633	.377	.166	.047	.006	.000	.000	.000	4
5	1.000	1.000	1.000	.994	.953	.834	.623	.367	.150	.033	.003	.000	.000	5
6	1.000	1.000	1.000	.999	.989	.945	.828	.618	.350	.121	.013	.001	.000	6
7	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.322	.070	.012	.000	7
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.624	.264	.086	.004	8
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.893	.651	.401	.096	9
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	10

Wilcoxon 符號等級檢定臨界值表--成對母體檢定

單尾檢定之臨界值 $T_{\alpha, n}$; 雙尾檢定之臨界值 $T_{\alpha/2, n}$

n	單尾 $\alpha=0.05$	單尾 $\alpha=0.025$	單尾 $\alpha=0.01$	單尾 $\alpha=0.005$
	雙尾 $\alpha=0.10$	雙尾 $\alpha=0.05$	雙尾 $\alpha=0.02$	雙尾 $\alpha=0.01$
5	1			
6	2	1		
7	4	2	0	
8	6	4	2	0
9	8	6	3	2
10	11	8	5	3
11	14	11	7	5
12	17	14	10	7