

106年公務人員特種考試司法人員、法務部
調查局調查人員、國家安全局國家安全情報
人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試試題

考試別：國家安全情報人員
等 別：三等考試
類科組：電子組（選試英文）
科 目：工程數學
考試時間：2小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
(二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
(三)本科目得以本國文字或英文作答。

一、設
$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(一)試求矩陣 \mathbf{A} 特徵值？（5分）

(二)試求矩陣 \mathbf{A} 特徵向量？（5分）

(三)試求
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$
？（5分）

二、請證明 $T: R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (x+y, x-y, z)$ 是線性轉換 (linear transformation)。(10分)

三、已知 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在整個複數 $z = x + iy$ 平面可解析，同時 $f(0) = 0$ 且

$u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 。求 $f(z)$ 。(10分)

四、求下列微分方程式的通解： $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = x^2 + 1, x > 0$ (其中 $y' \equiv \frac{dy}{dx}, y'' \equiv \frac{d^2y}{dx^2}$)。
(15分)

7 求複變函數 $W = \sqrt[4]{5+5i}$ 之所有根 (root) ?

(A) $W_0 = \sqrt[8]{50}e^{i(\pi/16)}$, $W_1 = \sqrt[8]{50}e^{i(9\pi/16)}$, $W_2 = \sqrt[8]{50}e^{i(17\pi/16)}$, $W_3 = \sqrt[8]{50}e^{i(25\pi/16)}$

(B) $W_0 = \sqrt[4]{50}e^{i(\pi/16)}$, $W_1 = \sqrt[4]{50}e^{i(9\pi/16)}$, $W_2 = \sqrt[4]{50}e^{i(17\pi/16)}$, $W_3 = \sqrt[4]{50}e^{i(25\pi/16)}$

(C) $W_0 = \sqrt[4]{50}e^{i(\pi/8)}$, $W_1 = \sqrt[4]{50}e^{i(2\pi/8)}$, $W_2 = \sqrt[4]{50}e^{i(3\pi/8)}$, $W_3 = \sqrt[4]{50}e^{i(4\pi/8)}$

(D) $W_0 = \sqrt[8]{50}e^{i(\pi/4)}$, $W_1 = \sqrt[8]{50}e^{i(2\pi/4)}$, $W_2 = \sqrt[8]{50}e^{i(3\pi/4)}$, $W_3 = \sqrt[8]{50}e^{i(4\pi/4)}$

8 求 $\int_0^\pi \frac{d\theta}{4-\cos\theta}$ 之積分值：

(A) $\frac{\pi}{\sqrt{4}}$

(B) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$

(C) $\frac{\pi}{\sqrt{10}}$

(D) $\frac{\pi}{\sqrt{15}}$

9 求 $\frac{1}{z+z^2}$ 在 $z=0$ 之留數 (residue) 之值為何？

(A) 0.5

(B) 1

(C) 2

(D) 3

10 下列何者不為「尤拉-柯西」方程式 (Euler-Cauchy Equation) ?

(A) $x^2y'' + 7xy' + 13y = 0$, $(y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2})$

(B) $x^2y'' + 23y = 0$, $(y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2})$

(C) $y'' + xy' + x^2y = 0$, $(y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2})$

(D) $x''y^2 + 9x'y - 5x = 0$, $(x' = \frac{dx}{dy}, x'' = \frac{d^2x}{dy^2})$

11 設微分方程式 $x''(t) + 4x(t) = \sin 3t$ 的解 $x(t)$ 經過拉普拉斯 (Laplace) 轉換後為 $X(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$ ，下列何者為正確之初始條件？

(A) $x(0) = 1, x'(0) = 0$

(B) $x(0) = 0, x'(0) = 0$

(C) $x(0) = 0, x'(0) = -1$

(D) $x(0) = 0, x'(0) = 1$

12 下列敘述何者正確？

(A) $x^2y'' + 4xy' + 4y = 0$ 的通解為 $(c_1 + c_2x)e^{-2x}$ ，其中 c_1, c_2 為任意常數

(B) $x^2y'' + 4xy' + 4y = 0$ 的通解為 $(c_1 + c_2 \ln x)x^{-2}$ ，其中 c_1, c_2 為任意常數

(C) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ 的通解為 $(c_1 + c_2 \ln x)x^{-2}$ ，其中 c_1, c_2 為任意常數

(D) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ 的通解為 $\left(c_1 \cos \frac{3}{2}x + c_2 \sin \frac{3}{2}x \right) e^{-\frac{5}{2}x}$ ，其中 c_1, c_2 為任意常數

13 已知 $y'' - 6y' + 5y = 4e^{2t}$ ，下列何者可為此微分方程式的解？

- (A) $y = 2e^t + 3e^{5t}$ (B) $y = 2e^{2t} + 3e^{5t}$ (C) $y = 3e^t + 3e^{5t}$ (D) $y = 3e^{2t} + 3e^{5t}$

14 如以對中心點 $x = 0$ 展開之 Frobenius 數列方式求解 $x^2y'' + x^2y' - 2y = 0$ ，則其所得到的指示方程式 (Indicial equation) 為何？

- (A) $r^2 - 2 = 0$ (B) $r^2 - r - 2 = 0$ (C) $r^2 + 2r - 2 = 0$ (D) $r^2 + r - 1 = 0$

15 設微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ ， $y(0) = y_0$ ， $y'(0) = y'_0$ 的級數解 (series solution) 為 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (2x)^n}{n!}$ ，試求常數 a 、 b 、 y_0 及 y'_0 之值，並判定下列何者正確？

- (A) $a+b+y_0+y'_0 = 1$ (B) $a+b+y_0+y'_0 = 2$ (C) $a+b+y_0+y'_0 = 3$ (D) $a+b+y_0+y'_0 = 4$

16 將週期函數 $f(t) = t$ ， $-\pi \leq t < \pi$ ，週期為 2π ，展開成傅立葉複係數級數：

- (A) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{int}$ (B) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{n} e^{int}$ (C) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{n} (-1)^n e^{int}$ (D) $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{n} (-1)^{n+1} e^{int}$

17 假設 $f(t)$ 的傅立葉轉換 (Fourier Transform) 式為 $F(\omega)$ ，試求 $f(3t)$ 的傅立葉轉換為：

- (A) $\frac{1}{3} F\left(\frac{\omega}{3}\right)$ (B) $3F(3\omega)$ (C) $F\left(\frac{\omega}{3}\right)$ (D) $F(3\omega)$

18 假設阿里山森林保護區共有 10 位職員，其中需要 5 位職員負責巡邏森林，2 位職員在辦公室裡負責行政事務，而其他 3 位職員支援嘉義市，試問：此 10 位職員被分為這 3 組的方法有多少種？

- (A) 2520 (B) 1260 (C) 840 (D) 630

19 連續隨機變數 X 與 Y 之結合機率密度函數為 (joint probability density function)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2y + \frac{1}{4}y, & \text{if } 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

試問下列何者正確？

- (A) $E[XY] = \frac{5}{8}$ (B) $E[XY] = \frac{4}{3}$ (C) $E[XY] = 1$ (D) $E[XY] = 5/6$

20 假定 X 為一隨機變數，其機率密度函數 (density function) 為 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} \exp\left(-\frac{(x+3)^2}{32}\right)$ ， $-\infty < x < \infty$ ，求其期望值 $E(X)$ 為何？

- (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3

測驗題標準答案更正

考試名稱：106年公務人員特種考試司法人員、法務部調查局調查人員、國家安全局國家安全情報人員、海岸巡防人員及移民行政人員考試

類科名稱：電子組(選試英文)

科目名稱：工程數學

單選題數：20題

單選每題配分：2.50分

複選題數：

複選每題配分：

標準答案：答案標註#者，表該題有更正答案，其更正內容詳見備註。

題號	第1題	第2題	第3題	第4題	第5題	第6題	第7題	第8題	第9題	第10題
答案	C	B	D	D	C	C	A	D	B	C

題號	第11題	第12題	第13題	第14題	第15題	第16題	第17題	第18題	第19題	第20題
答案	B	C	#	B	D	C	A	A	D	A

題號	第21題	第22題	第23題	第24題	第25題	第26題	第27題	第28題	第29題	第30題
答案										

題號	第31題	第32題	第33題	第34題	第35題	第36題	第37題	第38題	第39題	第40題
答案										

題號	第41題	第42題	第43題	第44題	第45題	第46題	第47題	第48題	第49題	第50題
答案										

題號	第51題	第52題	第53題	第54題	第55題	第56題	第57題	第58題	第59題	第60題
答案										

題號	第61題	第62題	第63題	第64題	第65題	第66題	第67題	第68題	第69題	第70題
答案										

題號	第71題	第72題	第73題	第74題	第75題	第76題	第77題	第78題	第79題	第80題
答案										

題號	第81題	第82題	第83題	第84題	第85題	第86題	第87題	第88題	第89題	第90題
答案										

題號	第91題	第92題	第93題	第94題	第95題	第96題	第97題	第98題	第99題	第100題
答案										

備註：第13題一律給分。