

等 別： 高考一級

類 科： 物理

科 目： 近代物理研究

考試時間： 3 小時

座號： \_\_\_\_\_

※注意：(一)可以使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)請以黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。

本試題中可能會用到的物理常數：光速  $c = 3.00 \times 10^8$  m/s，普朗克常數  $h = 6.63 \times 10^{-34}$  J·s

一、一波長為 22 pm ( $1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$ ) 的 X 光打在碳靶 (carbon target) 後，在垂直於入射光 (incident beam) 的方向被偵測到。請算出被偵測到之 X 光的波長。(10 分)

二、一氫原子中的電子之波函數 (wave function) 為

$$\psi = \frac{1}{6} [3\psi_{100}(r) + 4\psi_{211}(r) - \psi_{210}(r) + \sqrt{10}\psi_{21-1}(r)]。$$

請求出該電子之(一)能量的期望值  $\langle E \rangle$ ，(二)角動量平方的期望值  $\langle L^2 \rangle$ ，(三)角動量之  $z$  分量的期望值  $\langle L_z \rangle$ 。(註： $\psi_{100}$  代表該波函數之  $n=1, l=m_l=0$ ) (15 分)

三、一個含有兩個自旋  $\frac{1}{2}$  (spin- $\frac{1}{2}$ ) 粒子的系統可以有 4 種態 (states)，其自旋態分別為  $|++\rangle$ ， $|+-\rangle$ ， $|-\rangle$  和  $|--\rangle$ 。其中有兩種態的  $m$ -值為 0： $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-\rangle)$  和  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-\rangle)$ 。請證明 (show)  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-\rangle)$  是屬於三重態 (triplet state,  $S=1$ ) 而  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-\rangle)$  是屬於單重態 (singlet state,  $S=0$ )。(10 分)

四、一粒子被限制在  $x=0$  和  $x=a$  間運動。其波函數 (wave function) 為  $\psi(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-i\omega t}$ 。

請求出該粒子所受到的位能  $V(x)$ 。(10 分)

五、一粒子的歸一波函數 (normalized wave function) 為

$$\psi(x) = 2\alpha^{3/2}xe^{-\alpha x} \quad x > 0; \quad \psi(x) = 0 \quad x < 0$$

請算出  $\langle x \rangle$ ， $\langle p^2 \rangle$ 。(註： $\langle x \rangle$  為  $x$  的期望值) (10 分)

六、有  $N$  個質量為  $m$ ，自旋為  $\frac{1}{2}$  (spin- $\frac{1}{2}$ ) 之粒子被限制在  $x=0$  和  $x=a$  的無限大位能井內運動。請算出此系統中有粒子填充 (occupied) 之最高能階為何？(粒子間無相互作用) (10 分)

七、有一極小的微擾位能  $V(x) = kx^4$ ，( $k > 0$ ) 加諸於一度空間諧振位能 (harmonic oscillator potential) 的系統  $H = p^2/2m + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$  上。請算出此微擾對原系統之基態能量  $E_0$  所產生的變化  $\Delta E$ ？(10 分)

八、依據導電的特性，請說明什麼是(一)金屬 (metal)，(二)半金屬 (half-metal)，(三)半導體 (semiconductor)。(15 分)

九、有一顆動能為 2.00 百萬電子伏特 (MeV) 的電子，請計算該電子的動量 (momentum) 值。(10 分)